

Triangulations Faiblement Contraintes

Mathieu Brévilliers, Nicolas Chevallier et Dominique Schmitt

Laboratoire MIA, Université de Haute-Alsace
4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse Cedex, France
{Mathieu.Brevilliers, Nicolas.Chevallier, Dominique.Schmitt} @uha.fr

Abstract

Given a set S of line segments in the plane, we introduce a new family of partitions of the convex hull of S called weakly constrained triangulations of S . The set of faces of such a triangulation is a maximal set of disjoint triangles whose open sides either do not cut S or are contained in S . The faces whose vertices are in three distinct segments of S allow to define a new kind of diagrams called segment triangulations of S . We study the relations between the weakly constrained triangulations and the segment triangulations and we show that several properties of planar point set triangulations extend to segment triangulations. We also show that, if S is in general position, there exists a unique segment triangulation of S whose faces are inscribable in circles whose interiors do not intersect S . This triangulation, called segment Delaunay triangulation, is dual to the segment Voronoi diagram. The main result of this paper is that the local optimality which characterizes point set Delaunay triangulations [Law77] extends to segment Delaunay triangulations.

Étant donné un ensemble S de segments de droite dans le plan, nous présentons une nouvelle famille de partitions de l'enveloppe convexe de S , que nous appelons triangulations faiblement contraintes de S . L'ensemble des faces d'une telle triangulation est un ensemble maximal de triangles disjoints dont les côtés ouverts soit sont contenus dans S , soit ne coupent pas S . Les faces dont les sommets sont répartis sur trois segments de S permettent de définir une nouvelle famille de diagrammes, appelés triangulations de segments de S . Nous étudions les relations entre les triangulations faiblement contraintes et les triangulations de segments et nous montrons que plusieurs propriétés des triangulations d'ensembles de points s'étendent aux triangulations de segments. Nous montrons aussi que si S est en position générale, alors il existe une unique triangulation de segments dont les faces sont inscriptibles dans des cercles dont les intérieurs ne coupent pas S . Cette triangulation, appelée triangulation de Delaunay de segments, est duale du diagramme de Voronoi de segments. Le résultat principal de cet article est que l'optimalité locale qui caractérise les triangulations de Delaunay d'ensembles de points [Law77] s'étend aux triangulations de Delaunay de segments.

Introduction

Étant donné un ensemble S de n points dans le plan, une triangulation de S est une décomposition de l'enveloppe convexe de S en triangles disjoints dont les sommets sont les points de S . Le problème de la construction d'une triangulation de S admet de nombreuses applications notamment pour la modélisation de surfaces, de terrains, ... Dans ces applications il s'agit de trouver la triangulation la plus régulière possible c'est-à-dire celle dont les triangles sont les plus "équilatéraux possibles". En 1978, Sibson [Sib78] a montré que la triangulation la plus régulière est la triangulation de Delaunay. Cette triangulation est telle que le cercle cir-

conscrit à ses triangles ne contient aucun site de S en son intérieur [Del34]. Lorsqu'il s'agit de modéliser un terrain, celui-ci contient souvent des contraintes telles que des rivières, des routes, des crêtes de montagnes, ... et les triangles à construire ne doivent pas couper ces contraintes. Pour résoudre ce problème, Lee et Lin [LL86] ont introduit la notion de triangulation contrainte. Étant donné un ensemble S de points et un ensemble T de segments qui relient certains de ces points, il s'agit d'une triangulation de S dont T est un sous-ensemble de côtés (voir Figure 1(a)). Lee et Lin ont montré que la triangulation contrainte la plus régulière est la triangulation contrainte de Delaunay qui est elle aussi carac-

térisée à l'aide des cercles circonscrits à ses faces. Cependant, si les segments sont particulièrement longs ou si les points sont mal disposés autour des segments, on remarque que les triangles s'appuyant sur les contraintes sont très irréguliers. Pour résoudre ce problème, une solution intéressante consiste à ajouter des points, appelés points de Steiner, dans l'ensemble initial puis à mettre à jour la triangulation contrainte en tenant compte de ces nouveaux points (voir, par exemple, [BE95]). En effet, les points de Steiner qui sont ajoutés sur des segments permettent de les décomposer en sous-segments et de construire de meilleures triangulations contraintes (voir Figure 1(b)). Avec cette méthode, la décomposition d'un segment contraint en sous-segments est donc la même des "deux côtés" de ce segment. Cela n'est pas toujours justifié car la répartition des points n'est pas la même de part et d'autre d'un segment et on pourrait souhaiter traiter ces deux côtés indépendamment. On pourrait, par exemple, trianguler indépendamment les deux pentes de part et d'autre d'une crête de montagne.

Dans cet article, nous initiions l'étude d'une nouvelle triangulation d'un ensemble S de points et de segments disjoints du plan, que nous appellerons triangulation faiblement contrainte. Les éléments de S , points et segments, sont appelés des sites. Pour obtenir une triangulation faiblement contrainte de l'enveloppe convexe $\text{conv}(S)$ de S , il faut remplir $\text{conv}(S) \setminus S$ avec des triangles disjoints dont les sommets sont dans S et dont les côtés ouverts soit sont contenus dans S , soit ne coupent pas S . Dans une telle triangulation (voir Figure 1(c)), un point ajouté sur un segment ne scinde pas ce segment en deux mais devient un sommet de plusieurs triangles qui sont d'un même côté du segment. Comme les sites de S sont supposés disjoints, une triangulation faiblement contrainte de S admet deux types de triangles : ceux dont les sommets sont sur deux sites distincts et ceux dont les sommets sont sur trois sites distincts. Dans ce papier nous allons plus particulièrement étudier le deuxième type de triangles en montrant, notamment, que leur nombre est un invariant de S (c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de la triangulation faiblement contrainte choisie).

Pour cela nous introduisons une nouvelle famille de diagrammes définis sur un ensemble S de points et de segments, que nous appellerons triangulations de segments de S . L'ensemble des faces d'une triangulation de segments de S est un ensemble maximal de triangles disjoints tel que les sommets de chaque triangle appartiennent à trois sites distincts de S et tel qu'aucun autre point de ces triangles ne soient dans S . Les arêtes d'une triangulation de segments sont les composantes connexes (éventuellement de dimension deux) de l'enveloppe convexe de S privée des faces ouvertes et des sites. Ces définitions sont naturelles car, si S est un ensemble de points, on retrouve les définitions des faces et des arêtes d'une triangulation d'un ensemble de points.

Dans les deux premières sections, nous étudions les relations entre les triangulations faiblement contraintes et les

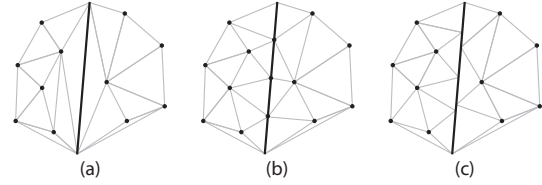


Figure 1: Exemples de triangulation contrainte (a), de triangulation de Steiner (b) et de triangulation faiblement contrainte (c).

triangulations de segments. Nous montrons également que plusieurs propriétés des triangulations d'ensembles de points s'étendent aux triangulations de segments.

Dans la section suivante, nous prouvons qu'il existe une unique triangulation de segments de S dont les faces sont inscriptibles dans des cercles vides. Nous montrons que cette triangulation, appelée triangulation de Delaunay de segments, est duale du diagramme de Voronoi de segments et qu'elle peut, par conséquent, être construite en temps $O(n \log n)$.

La triangulation de Delaunay d'un ensemble de points admet une importante caractérisation locale qui est utilisée pour prouver plusieurs de ses propriétés d'optimalité et qui permet de tester en temps linéaire si une triangulation donnée est de Delaunay. Selon cette caractérisation locale, une triangulation est de Delaunay si et seulement si tout couple de faces adjacentes à un même côté est en position de Delaunay relativement aux quatre sites qui les définissent [Law77]. Le résultat principal de la seconde partie de l'article est que cette propriété caractérise aussi la triangulation de Delaunay de segments parmi toutes les triangulations de segments d'un ensemble de segments donné. Nous donnons également une autre propriété locale qui caractérise l'ensemble des triangulations de segments qui ont la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments.

1. Triangulations Faiblement Contraintes et Triangulations de Segments

Soit S un ensemble fini de $n \geq 2$ segments fermés disjoints dans le plan, appelés sites. Dans tout l'article, on considère qu'un segment fermé peut être réduit à un point. Nous disons qu'un cercle est tangent à un site s si s intersecte ce cercle mais pas son intérieur. Les sites de S sont en position générale, c'est-à-dire que nous supposons qu'il n'existe pas trois extrémités de segments qui sont alignées ni de cercle tangent à quatre sites.

Définition 1 (i) *Étant donné un ensemble S de sites, nous appelons S -polygone (éventuellement à trous) toute partie A de $\text{conv}(S)$ qui est fermée, de dimension deux, égale à la fermeture de son intérieur, telle que $A \setminus S$ est connexe et telle que la frontière de A est composée d'un nombre fini de seg-*

ments disjoints qui :

- soit sont fermés et inclus dans S ,
- soit sont ouverts, ne coupent pas S et ont leurs extrémités dans S .

(ii) Nous appelons triangulation faiblement contrainte de A (relativement à S), toute partition de A en triangles dont les sommets sont dans S , dont les intérieurs ne coupent pas S et dont les côtés ouverts soit ne coupent pas S , soit sont inclus dans S (voir Figure 2).

Si $A = \text{conv}(S)$, une telle triangulation est appelée une triangulation faiblement contrainte de S .

Nous définissons maintenant la notion de triangulation de segments et nous montrons ensuite le lien avec la notion de triangulation faiblement contrainte.

Définition 2 Une triangulation de segments P de S est une partition de l'enveloppe convexe $\text{conv}(S)$ de S en sites, faces et arêtes tels que :

- (i) Chaque face de P est un triangle ouvert dont les sommets appartiennent à trois sites distincts de S et dont les côtés ouverts ne coupent pas S ,
- (ii) Aucune face ne peut être ajoutée sans couper une face déjà existante,
- (iii) Les arêtes de P sont les composantes connexes (éventuellement de dimension deux) de $\text{conv}(S) \setminus (F \cup S)$, où F est l'ensemble des faces de P .

Une telle triangulation existe toujours car, quel que soit l'ensemble S , il existe un nombre fini de faces qui vérifient la Définition 2. En effet, il est facile de remarquer qu'au maximum deux triangles disjoints peuvent avoir leurs sommets sur les trois mêmes sites (voir Figure 4(a)).

Le lemme suivant permet d'établir le lien entre les triangulations de segments et les triangulations faiblement contraintes.

Lemme 1 Si A est un S -polygone qui coupe au moins trois sites de S alors toute triangulation faiblement contrainte de A contient au moins un triangle dont les sommets sont sur trois sites distincts de S .

Preuve. Étant donnée une triangulation faiblement contrainte T de A , soit $\Delta_T(A)$ l'ensemble (éventuellement vide) des triangles de T qui ont un côté dans S . Nous montrons, par récurrence sur le nombre $|\Delta_T(A)|$ de triangles de $\Delta_T(A)$, que T contient au moins un triangle dont les sommets appartiennent à trois sites distincts de S .

Il est évident que, si $\Delta_T(A) = \emptyset$, les sommets de tous les triangles de T appartiennent à trois sites distincts. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour toute triangulation faiblement contrainte T telle que $|\Delta_T(A)| < k$ ($k \geq 1$).

Comme A coupe au moins trois sites, pour toute triangulation faiblement contrainte T de A avec $|\Delta_T(A)| = k$ et pour tout triangle fermé t de $\Delta_T(A)$, la fermeture $A \setminus t$ de $A \setminus t$ coupe les mêmes sites que A . Si $A \setminus t$ est connexe, $A' = A \setminus t$ est un S -polygone. Sinon, $A \setminus t$ a deux composantes connexes et la fermeture de l'une des deux au moins est un S -polygone. Dans ce dernier cas, chacun des deux S -polygones

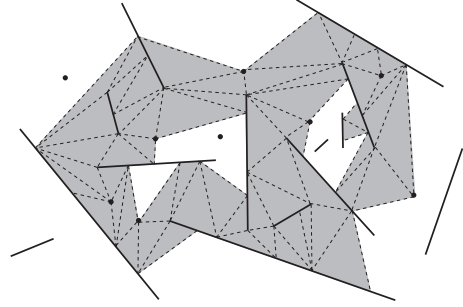


Figure 2: Une triangulation faiblement contrainte (lignes en pointillés) d'un S -polygone (en gris).

intersecte les deux sites auxquels appartiennent les sommets de t . Cela signifie qu'au moins l'un de ces S -polygones coupe au moins trois sites. Soit A' ce S -polygone. Dans les deux cas, si T' est la restriction de T à A' , $|\Delta_{T'}(A')| < |\Delta_T(A)|$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, T' contient au moins un triangle dont les sommets appartiennent à trois sites distincts de S . Il en est de même pour T . \square

D'après ce lemme, pour toute triangulation faiblement contrainte de S , l'ensemble F de triangles dont les sommets sont sur trois sites distincts de S est maximal. En effet, la fermeture de toute composante connexe e de $\text{conv}(S) \setminus (F \cup S)$ est soit un segment qui relie deux points, soit un S -polygone. Dans ce dernier cas, d'après le Lemme 1, \bar{e} ne peut intersecter que deux sites. C'est pourquoi aucun triangle dont les sommets sont sur trois sites distincts de S ne peut être ajouté sans couper $F \cup S$. On en déduit les théorèmes suivants :

Théorème 1 Toute triangulation faiblement contrainte de S est un raffinement d'une triangulation de segments de S , c'est-à-dire une triangulation de segments dont les arêtes sont décomposées en triangles.

Théorème 2 La fermeture d'une arête d'une triangulation de segments de S coupe exactement deux sites de S .

Cela montre qu'une arête d'une triangulation de segments P de S est vraiment une arête, dans ce sens qu'elle "connecte" exactement deux sites de S . Cela permet également de déduire directement la forme de l'arête. La fermeture d'une arête est soit un segment qui relie deux points de deux sites distincts de S , soit un triangle avec un côté et son sommet opposé dans S , soit un quadrilatère (pas forcément convexe) avec deux côtés opposés dans S (voir Figure 3). De plus, chaque arête de P contient :

- soit deux côtés de deux triangles de P ,
- soit un côté d'un triangle de P et un côté de $\text{conv}(S)$ qui n'est pas un site,
- soit deux côtés de $\text{conv}(S)$ qui ne sont pas des sites.

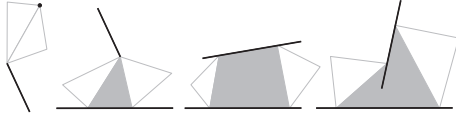


Figure 3: Exemples d'arêtes (en gris) qui relient deux sites dans une triangulation de segments.

2. Propriétés Topologiques des Triangulations de Segments

Comme chaque arête d'une triangulation de segments P de S "connecte" deux sites de S , nous pouvons associer à P un graphe abstrait tel que :

- les sommets du graphe sont les sites de S ,
- les arêtes qui relient deux sites s et t dans le graphe sont les arêtes de P dont les fermetures coupent s et t .

Proposition 1 *Le graphe abstrait associé à une triangulation de segments P de S est planaire.*

Preuve. Pour tout site s de S , soit γ_s une courbe de Jordan convexe fermée telle que :

- s est à l'intérieur de γ_s (i.e. dans la partie du plan bornée par γ_s),
- $S \setminus s$ est à l'extérieur de γ_s ,
- l'intérieur de γ_s intersecte uniquement les arêtes de P dont les fermetures coupent s .

On remplace maintenant chaque site s par un point p_s à l'intérieur de γ_s . Pour toute arête e de P qui intersecte γ_s , on remplace la partie de e à l'intérieur de γ_s par un segment qui relie p_s à un point de e sur γ_s . En faisant cela, l'ordre des arêtes autour de s reste inchangé et les arêtes réduites sont disjointes. Une fois cette transformation effectuée pour chaque courbe de Jordan γ_s , on remplace chaque arête réduite par un arc de Jordan inclus dans l'arête. Finalement, on obtient une représentation planaire G du graphe abstrait associé à P (voir Figure 4(b)). \square

Théorème 3 *Toute triangulation de segments P d'un ensemble S de n sites contient $3n - n' - 3$ arêtes et $2n - n' - 2$ faces, où n' est le nombre de côtés de $\text{conv}(S)$ qui ne sont pas des sites.*

Preuve. Compter les arêtes et les faces de P revient à compter les arêtes et les faces bornées de la représentation planaire G construite dans la preuve de la Proposition 1. De plus, la face non bornée de G correspond au complémentaire de $\text{conv}(S)$. Le résultat est donc une conséquence immédiate de la relation d'Euler, du fait que chaque face bornée de G a trois côtés et du fait que les arêtes adjacentes à une (respectivement aucune) face bornée apparaissent une fois (respectivement deux fois) en parcourant la frontière de la face non bornée de G . \square

Une conséquence intéressante de ce théorème est que la taille d'une triangulation de segments est linéaire avec le

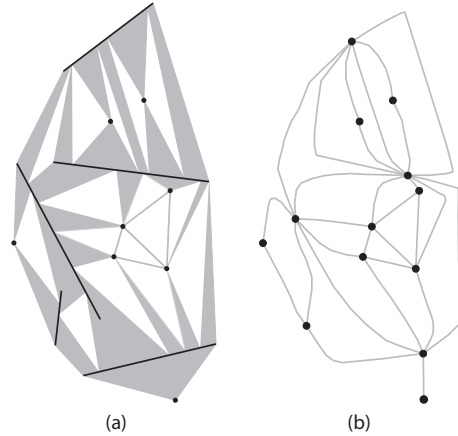


Figure 4: Une triangulation de segments (a) (les sites sont en noir, les arêtes en gris, et les faces en blanc) et son graphe associé (b).

nombre de sites. De plus, cela montre que le nombre de triangles de la triangulation est un invariant de l'ensemble de sites. C'est une extension d'une propriété bien connue des triangulations d'ensembles de points dans le plan.

Il résulte du Théorème 1 que le nombre de triangles qui s'appuient sur trois sites dans une triangulation faiblement contrainte est également un invariant de l'ensemble de sites et ne dépend donc pas du nombre de points ajoutés sur les sites. Nous nous intéresserons ici au placement de ces triangles, à travers l'étude de triangulations de segments particulières.

En utilisant la représentation planaire G construite dans la preuve de la Proposition 1, on peut associer à la triangulation de segments P une carte combinatoire M :

- le graphe sous-jacent est le graphe abstrait associé à P ,
- pour tout sommet s de M , l'ordre circulaire des arêtes issues de s correspond à l'ordre des arcs de Jordan autour de s (dans le sens trigonométrique) dans la représentation planaire G .

En général, la même carte M est associée à plusieurs triangulations de segments différentes. On dit que :

Définition 3 *Deux triangulations de segments de S ont la même topologie si elles ont la même carte combinatoire associée.*

Pour utiliser M comme structure de données pour stocker une triangulation de segments P , il suffit d'ajouter les coordonnées des sommets des triangles de P dans la structure : un sommet par arête orientée. L'espace nécessaire pour stocker une triangulation d'un ensemble S de n sites est donc en $O(n)$. Par ailleurs, comme une triangulation contrainte est un cas particulier de triangulation faiblement contrainte, il est possible de construire une triangulation faiblement contrainte en temps $O(n \log n)$ en utilisant un algorithme optimal

de construction d'une triangulation contrainte (par exemple, un algorithme par balayage [Ede00]). En outre, d'après le Théorème 1, toute triangulation contrainte de S est un raffinement d'une triangulation de segments de S . Donc ce même algorithme peut être facilement adapté pour construire une triangulation de segments en temps $O(n \log n)$.

3. Triangulation de Delaunay de Segments et Diagramme de Voronoi de Segments

Parmi l'ensemble de toutes les triangulations de segments, certaines sont remarquables : on pourrait s'intéresser, par exemple, aux triangulations de segments dont la somme des aires des faces est maximale. Dans cette section, nous nous intéressons plus particulièrement à la triangulation de segments dont les faces sont inscriptibles dans des cercles vides. Nous prouvons l'existence et l'unicité de cette triangulation de segments particulière et nous montrons qu'elle est duale du diagramme de Voronoi de segments (voir Figure 5). Nos preuves utilisent différentes propriétés du diagramme de Voronoi de segments qui peuvent être trouvées dans [AK98], [BY95] et [OBS92].

Soit F l'ensemble des triangles du plan tels que les sommets de chaque triangle appartiennent à trois sites distincts de S et tels que l'intérieur du cercle circonscrit à chaque triangle n'intersecte pas S .

Théorème 4 (i) *Les triangles de F sont les faces d'une triangulation de segments P de S appelée triangulation de Delaunay de segments.*

(ii) *La carte combinatoire M associée à P est duale du diagramme de Voronoi de segments de S .*

Preuve. Comme l'intérieur du cercle circonscrit à un triangle de F est vide, deux de ces triangles ne peuvent pas se couper. Donc ces triangles sont des faces d'une triangulation de segments. D'une part, d'après le Théorème 3, le nombre de triangles d'une triangulation de segments de S est égal au nombre de sommets du diagramme de Voronoi $Vor(S)$ de S . D'autre part, chaque sommet du diagramme de Voronoi correspond à un triangle de F . Donc le nombre de triangles de F est maximal, ce qui signifie que F est l'ensemble des triangles d'une triangulation de segments P . De plus, par définition du diagramme de Voronoi, les régions de $Vor(S)$ correspondent aux sites, qui sont, par définition, les sommets de M .

Il reste à étudier le cas des arêtes de M et de $Vor(S)$. Soit a une arête de $Vor(S)$ commune aux deux régions de Voronoi de s et t . Chaque point p de a est le centre d'un cercle vide C_p tangent aux sites s et t aux points p_s et p_t . Il est facile de prouver qu'un tel segment ouvert $p_s p_t$ ne rencontre jamais un triangle de F . Donc, pour chaque p de a , le segment ouvert $p_s p_t$ est inclus dans une arête de la triangulation de segments P . De plus, la réunion E_a de tous les segments ouverts $p_s p_t$, $p \in a$, est une partie connexe de $conv(S)$, donc E_a est inclus dans une seule arête e de P qui relie s à t . La dernière

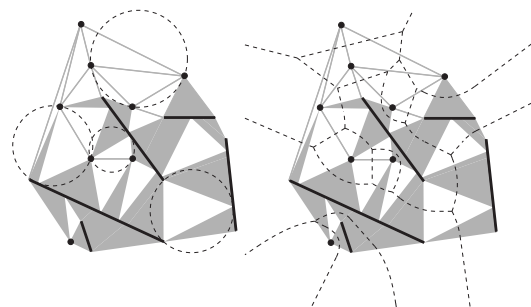


Figure 5: Une triangulation de Delaunay de segments et une illustration de la dualité.

chose à remarquer est que, pour chaque arête e de P , il existe exactement une arête a de $Vor(S)$ telle que $E_a \subset e$. Comme les nombres d'arêtes de P et de $Vor(S)$ sont égaux, il suffit de prouver que, pour chaque arête e de P , il existe au moins une arête a telle que $E_a \subset e$. Or, tout segment de la frontière d'une arête e qui relie s et t est du type $p_s p_t$ comme décrit précédemment. Donc il existe une arête a de $Vor(S)$ telle que $E_a \subset e$. \square

Il est facile de voir que la triangulation de Delaunay de segments de S définie dans ce théorème est équivalente au dual de $Vor(S)$ introduit par Chew et Kedem [CK89]. Grâce à la dualité, en utilisant un algorithme qui construit le diagramme de Voronoi de segments, la triangulation de Delaunay de segments peut être calculée en temps $O(n \log n)$ [OBS92]. Une triangulation faiblement contrainte de S dont les faces qui s'appuient sur trois sites sont inscriptibles dans des cercles vides peut donc également être construite en temps $O(n \log n)$.

4. Légalité dans les Triangulations de Segments

La légalité des arêtes est une propriété intéressante de la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points du plan. Considérons une arête d'une triangulation d'un ensemble de points, ainsi que ses deux triangles adjacents. Cette arête est illégale si un sommet de l'un de ces triangles est à l'intérieur du cercle circonscrit à l'autre triangle. Il est bien connu que la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points est l'unique triangulation de cet ensemble de points qui n'a pas d'arête illégale. Dans la suite, nous allons prouver une propriété similaire dans le cadre des triangulations de segments.

Définition 4 *Soient e une arête d'une triangulation de segments, T l'ensemble des faces adjacentes à e ($|T| \leq 2$), et S' l'ensemble des sites qui contiennent les sommets des faces de T . On dit que e est légale si les cercles circonscrits aux triangles de T ne contiennent aucun points de S' en leurs intérieurs.*

Théorème 5 *La triangulation de Delaunay de segments de S est l'unique triangulation de segments de S dont toutes les arêtes sont légales.*

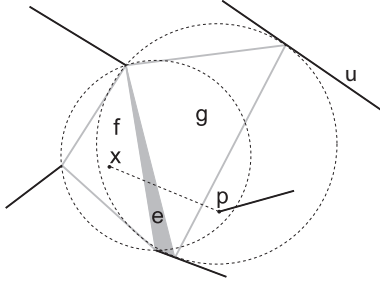


Figure 6: Illustration de la preuve du Théorème 5.

Preuve. Par définition, la triangulation de Delaunay de segments n'a pas d'arête illégale. Soit P une triangulation de segments qui n'est pas de Delaunay et soit f une face de P dont le cercle circonscrit c_f contient un point de S en son intérieur d_f . Il faut prouver que P a une arête illégale. Soient x un point de f et p un point de d_f qui est sur un site. On peut supposer que l'intérieur du segment xp ne coupe pas S . Soit k le nombre d'arêtes traversées par le segment xp . On peut remarquer que $k \geq 1$ car, par définition, p ne peut pas être dans f , ni dans une arête adjacente à f . Soient e la première arête traversée par xp , g l'autre face adjacente à e , c_g son cercle circonscrit, d_g l'intérieur de c_g , ab le côté de g contenu dans e et u le site qui contient le sommet de g qui n'est pas un sommet de e (voir Figure 6). Si $k = 1$, p est sur u et l'arête traversée par xp est donc illégale. Supposons maintenant que, si xp traverse k arêtes, alors au moins l'une d'entre elles est illégale. Il faut prouver que si xp traverse $(k + 1)$ arêtes alors P a une arête illégale. Si l'arête e est illégale, c'est fini. Sinon, les points a et b ne peuvent pas être dans le disque d_f . De plus, le point $y = ab \cap xp$ est dans d_f . Donc le segment ab scinde d_f en deux parties. Soient d_1 la partie contenant la face f et d_2 l'autre partie. Le disque d_g contient forcément au moins d_1 ou d_2 , et, comme e est légale, d_g ne peut pas contenir d_1 . Il s'ensuit que le segment yp est dans d_g et traverse une arête de moins que xp . D'après l'hypothèse de récurrence, on peut conclure que P a une arête illégale. \square

Comme nous l'avons remarqué dans la section 3, différentes triangulations de segments de S peuvent avoir la même topologie. En particulier, un nombre infini de triangulations de segments de S ont la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments de S . Cependant, comme la triangulation de Delaunay de segments peut être facilement calculée quand sa topologie est connue, il n'est pas nécessaire de stocker les coordonnées de ses sommets qui sont, par ailleurs, souvent imprécises. Par conséquent, il est intéressant de savoir si une triangulation de segments de S donnée a la même topologie que la triangulation de Delaunay de S . De plus, supposons qu'une triangulation de segments de S soit de Delaunay : si on modifie légèrement la position des sites de S sans modifier la topologie de la tri-

angulation, on peut se demander si la topologie est encore celle de la triangulation de Delaunay de segments pour ce nouvel ensemble S . Pour toutes ces raisons, nous définissons la légalité d'une arête dans le cadre des cartes associées aux triangulations de segments.

Définition 5 Soit f une face d'une triangulation de segments de S . Le triangle de tangence de f est tel que :

- ses sommets sont sur les trois mêmes sites que les sommets de f ,
- l'intérieur de son cercle circonscrit ne coupe pas ces trois sites,
- si f et son triangle de tangence sont parcourus dans le sens trigonométrique, ces trois sites sont rencontrés dans le même ordre.

Définition 6 Soit M une carte associée à une triangulation de segments de S . Une arête e de M est légale dans les deux cas suivants :

1. e est adjacente à au plus un triangle interne.
2. e est adjacente à deux triangles internes T_1 et T_2 et la propriété suivante est vraie. Soient t, r, u, v les sites tels que t, r, u sont incidents à T_1 et r, t, v sont incidents à T_2 dans le sens trigonométrique. Soient $t_1r_1u_1$ et $r_2t_2v_2$ les triangles de tangence de T_1 et T_2 avec $t_i \in t, r_i \in r, u_1 \in u$ et $v_2 \in v$. Alors :
 - le polygone $t_1t_2r_2r_1$ est soit réduit à un segment, soit un polygone simple orienté dans le sens trigonométrique (avec trois ou quatre côtés),
 - les intérieurs des cercles circonscrits à $t_1r_1u_1$ et $r_2t_2v_2$ ne courent pas les sites t, r, u, v .

Théorème 6 Soit M une carte associée à une triangulation de segments P de S . Si toutes les arêtes de cette carte sont légales, alors M est aussi la carte associée à la triangulation de Delaunay de segments de S .

Preuve abrégée. Nous voulons prouver que la collection des triangles de tangence donne lieu à la triangulation de Delaunay de segments. En utilisant le théorème précédent, nous remarquons que la seule chose à prouver est que les intérieurs des triangles de tangence sont les faces d'une triangulation de segments de S .

La principale idée de la preuve est d'utiliser un résultat de Devillers et al. [DLPT98] selon lequel une représentation d'une carte combinatoire par des courbes lisses dans le plan est un graphe planaire si :

- tous les circuits de la carte sont représentés par des courbes fermées simples,

- l'ordre en chaque sommet s de la carte est donné par l'ordre géométrique des courbes issues du point qui représente s .

En fait, le résultat de Devillers et al. est formulé avec des segments au lieu de courbes lisses, mais avec un argument d'approximation on obtient le même résultat avec des courbes lisses.

Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il est possible de construire un graphe planaire comme celui réalisé dans la Figure 7(a).

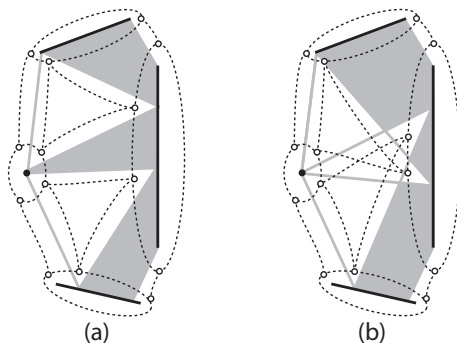


Figure 7: (a) Graphe planaire déduit de P . (b) Une nouvelle représentation de la carte M' .

Toutes les arêtes de ce graphe sont des courbes lisses qui sont soit à une distance inférieure à ε des sites, soit à une distance inférieure à ε des côtés des triangles de P . Ce graphe planaire est une représentation dans le plan d'une nouvelle carte combinatoire M' qui ne dépend pas de ε .

Maintenant, en déplaçant tous les triangles T de P jusqu'à leurs positions de tangence T' , nous pouvons définir une nouvelle représentation de la carte M' :

- les courbes associées à chaque triangle de P se déplacent des triangles initiaux jusqu'aux triangles de tangence.

- les nouvelles courbes fermées autour des sites sont légèrement plus compliquées à définir. Supposons que T_1 et T_2 sont deux triangles adjacents de P qui ont chacun un sommet sur un site s . Soit γ_s "l'ancienne" courbe autour de s . Il existe un point p_i sur γ_s associé au sommet de T_i qui est sur s et il existe un point p'_i sur γ_s associé au sommet du triangle de tangence T'_i qui est sur s . Dans la nouvelle représentation de la carte M' , nous considérons la partie de la courbe γ_s qui va de p'_1 à p'_2 en tournant autour de s dans le même sens que la partie de γ_s qui va de p_1 à p_2 (voir Figure 7(b)).

Cette définition assure que l'ordre géométrique des courbes issues d'un sommet est le même dans l'ancienne et dans la nouvelle représentation de la carte M' . Finalement, grâce à la légalité des arêtes, on peut prouver que la nouvelle représentation des circuits de M' sont des courbes fermées simples. Donc, d'après le résultat de Devillers et al., la nouvelle représentation de M' est un graphe planaire. Si on fait tendre ε vers zéro, on voit que les triangles de tangence sont les faces d'une triangulation de segments. \square

Le Théorème 6 permet de tester si une triangulation de segments a la topologie de la triangulation de Delaunay de segments en vérifiant la légalité des arêtes. D'après le Théorème 3, le nombre d'arête est en $O(n)$, où $n = \text{card}(S)$, et le test peut donc être effectué en temps $O(n)$. D'où :

Corollaire 1 *Il existe un algorithme linéaire qui vérifie si une triangulation de segments donnée a la topologie de la triangulation de Delaunay de segments.*

Par dualité, cela permet de vérifier en temps linéaire l'exactitude de la topologie d'un diagramme de Voronoi de segments calculé par un programme. Pour plus de détails sur les vérifications efficaces de programmes en géométrie algorithmique, consulter, par exemple, [DLPT98] et [MNS*96].

Conclusion

Dans cet article, nous avons notamment prouvé que la triangulation de Delaunay de segments est l'unique triangulation de segments dont toutes les arêtes sont localement de Delaunay. Dans le cadre des triangulations d'ensembles de points, la notion de légalité des arêtes est à l'origine de la propriété d'équiangularité de la triangulation de Delaunay ainsi que d'un algorithme dit "de flip" [Law77] qui permet de transformer une triangulation quelconque en triangulation de Delaunay par une suite d'améliorations locales. Cet algorithme est particulièrement simple à implémenter et, bien qu'ayant une complexité en $O(n^2)$ dans le pire des cas, il est efficace en pratique lorsque la triangulation initiale n'est pas "trop mauvaise".

Les résultats de cet article devraient permettre de prouver des propriétés d'optimalité de la triangulation de Delaunay de segments et de donner un algorithme de flip pour construire la triangulation de Delaunay de segments à partir d'une triangulation de segments quelconque. En plus de la caractérisation locale que nous avons démontrée, il y a un indice qui nous fait penser qu'une sorte d'algorithme de flip devrait fonctionner avec les triangulations de segments. En considérant le relèvement de l'ensemble de sites S sur le paraboloïde $z = x^2 + y^2$, il est facile de voir que les triangles de la triangulation de Delaunay de segments sont exactement les projetés des faces triangulaires de l'enveloppe convexe inférieure du relèvement de S . De plus, le relèvement de toute face qui n'est pas de Delaunay est au-dessus de cette enveloppe convexe inférieure, comme dans le cadre des triangulations d'ensembles de points.

Par ailleurs, une fois établies des propriétés d'optimalité de certaines triangulations de segments, on pourra s'intéresser à la régularité des triangulations faiblement contraintes. Il faudra alors établir diverses stratégies de raffinement d'une triangulation de segments pour obtenir une triangulation faiblement contrainte la plus régulière possible. Puis, les résultats pourront ensuite être comparés à ceux obtenus par des méthodes éprouvées de génération de maillages (voir, par exemple, [Rup95], [EG01] et [HPU05]).

D'autre part, très récemment, une attention toute particulière a été portée sur l'étude du diagramme de Voronoi d'un ensemble de segments en trois dimensions [MTT05], [SW06], [KS03], ... Cependant, la topologie de ce diagramme est connue uniquement pour un ensemble de trois droites [ELLD07]. L'étude du diagramme de Voronoi d'un ensemble de points a été grandement facilité par l'étude et la compréhension de son dual, le diagramme de Delaunay. Rappelons que, le diagramme de Delaunay de S a

plusieurs propriétés d'optimalité dont certaines restent valables en dimensions supérieures [Raj94], [SS99]. Jusqu'à maintenant, aucune propriété équivalente n'a été donnée, même dans le plan, pour le dual du diagramme de Voronoi de segments qui a été introduit par Chew et Kedem [CK89]. Plus surprenant encore, aucune famille de diagrammes contenant ce dual n'avait été définie alors même que plusieurs généralisations des triangulations d'ensembles de points ont déjà été étudiée : triangulations contraintes [LL86], pseudo-triangulations [RSS], pre-triangulations [AAH06], ... La notion de triangulation de segments comble ce vide et nous espérons que ces triangulations pourront être définies en dimension supérieure et que leur étude permettra une meilleure compréhension de la structure topologique du diagramme de Voronoi de segments en dimension supérieure.

References

- [AAH06] AICCHHOLZER O., AURENHAMMER F., HACKL T.: Pre-triangulations and liftable complexes. In *Proc. 22th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.* (2006), pp. 282–291.
- [AK98] AURENHAMMER F., KLEIN R.: Voronoi diagrams. In *Handbook of Computational Geometry*, Sack J.-R., Urrutia J., (Eds.). Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, Amsterdam, 1998.
- [BE95] BERN M. W., EPPSTEIN D.: Mesh generation and optimal triangulation. In *Computing in Euclidean Geometry*, Du D.-Z., Hwang F. K.-M., (Eds.), second ed., no. 4 in Lecture Notes Series on Computing. World Scientific, 1995, pp. 47–123.
- [BY95] BOISSONNAT J.-D., YVINEC M.: *Géométrie algorithmique*. Ediscience international, Paris, 1995.
- [CK89] CHEW L. P., KEDEM K.: Placing the largest similar copy of a convex polygon among polygonal obstacles. In *Proc. 5th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.* (1989), pp. 167–174.
- [Del34] DELAUNAY B.: Sur la sphère vide. *Bull. Acad. Sci. USSR: Class. Sci. Math. Nat.* 7 (1934), 793–800.
- [DLPT98] DEVILLERS O., LIOTTA G., PREPARATA F. P., TAMASSIA R.: Checking the convexity of polytopes and the planarity of subdivisions. *Comput. Geom. Theory Appl.* 11 (1998), 187–208.
- [Ede00] EDELSBRUNNER H.: Triangulations and meshes in computational geometry. *Acta Numerica* (2000), 133–213.
- [EG01] EDELSBRUNNER H., GUOY D.: Sink-insertion for mesh improvement. In *SCG '01: Proceedings of the seventeenth annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 2001), ACM Press, pp. 115–123.
- [ELLD07] EVERETT H., LAZARD S., LAZARD D., DIN M. S. E.: The voronoi diagram of three lines. In *SCG '07: Proceedings of the twenty-third annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 2007), ACM Press, pp. 255–264.
- [HPU05] HAR-PELED S., ÜNGÖR A.: A time-optimal delaunay refinement algorithm in two dimensions. In *SCG '05: Proceedings of the twenty-first annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 2005), ACM Press, pp. 228–236.
- [KS03] KOLTUM V., SHARIR M.: Three dimensional euclidean voronoi diagrams of lines with a fixed number of orientations. *SIAM J. Comput.* 32, 3 (2003), 616–642.
- [Law77] LAWSON C. L.: Software for C^1 surface interpolation. In *Math. Software III*, Rice J. R., (Ed.). Academic Press, New York, NY, 1977, pp. 161–194.
- [LL86] LEE D. T., LIN A. K.: Generalized Delaunay triangulation for planar graphs. *Discrete Comput. Geom.* 1 (1986), 201–217.
- [MNS*96] MEHLHORN K., NÄHER S., SCHILZ T., SCHIRRA S., SEEL M., SEIDEL R., UHRIG C.: Checking geometric programs or verification of geometric structures. In *Proc. 12th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.* (1996), pp. 159–165.
- [MTT05] MOURRAIN B., TÉCOURT J.-P., TEILLAUD M.: On the computation of an arrangement of quadrics in 3d. *Comput. Geom. Theory Appl.* 30, 2 (2005), 145–164.
- [OBS92] OKABE A., BOOTS B., SUGIHARA K.: *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1992.
- [Raj94] RAJAN V. T.: Optimality of the Delaunay triangulation in R^d . *Discrete Comput. Geom.* 12 (1994), 189–202.
- [RSS] ROTE G., SANTOS F., STREINU I.: Pseudo-triangulations - a survey. *Discrete Comput. Geom.* to appear.
- [Rup95] RUPPERT J.: A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *J. Algorithms* 18, 3 (1995), 548–585.
- [Sib78] SIBSON R.: Locally equiangular triangulations. *Comput. J.* 21, 3 (1978), 243–245.
- [SS99] SCHMITT D., SPEHNER J.-C.: Angular properties of Delaunay diagrams in any dimension. *Discrete Comput. Geom.* 5 (1999), 17–36.
- [SW06] SCHÖMER E., WOLPERT N.: An exact and efficient approach for computing a cell in an arrangement of quadrics. *Comput. Geom. Theory Appl.* 33, 1–2 (2006), 65–97.