

# Calcul du lacet non séparant le plus court d'une surface

**Jean-Marie Favreau**, Vincent Barra

Univ. Blaise Pascal (Clermont-Ferrand II), LIMOS UMR CNRS 6158  
Clermont-Ferrand

JGA 2009

## 1 Algorithme

- Algorithme initial
- Améliorations

## 2 Variations sur la distance

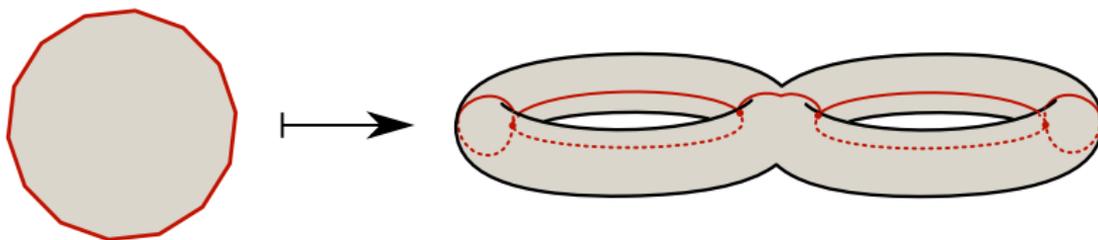
- Influence de la géométrie
- Spécificités de l'application

## 3 Résultats

- Efficacité de l'amélioration
- Régularité de la paramétrisation
- Cartographie et aide à la correction topologique

# Découpage de surface

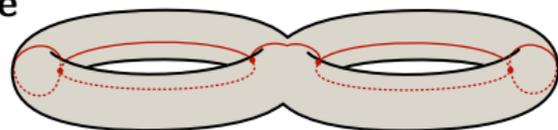
- Surfaces : 2-variétés à bords
- Objectif : **paver** les surfaces par un **polygone**



- Applications : imagerie médicale, infographie, etc.

# Chemins, lacets

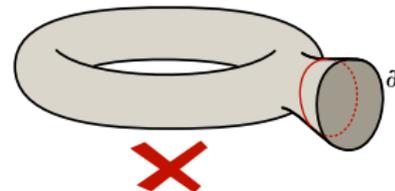
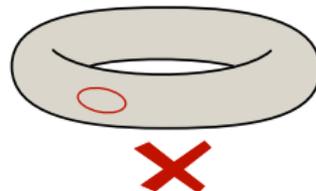
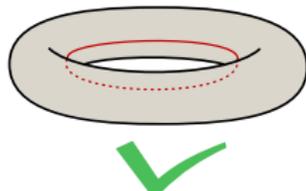
Sur une surface  $S$  : **pavage**  $\Leftrightarrow$  **découpage**



## Découpage

- Chemin :  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  continue
- Lacet : chemin  $\gamma$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = \text{point-base}$

Lacet **non séparant** : complémentaire dans  $S$  reste **connexe**



1

## Algorithme

- Algorithme initial
- Améliorations

2

## Variations sur la distance

- Influence de la géométrie
- Spécificités de l'application

3

## Résultats

- Efficacité de l'amélioration
- Régularité de la paramétrisation
- Cartographie et aide à la correction topologique

# Modélisation discrète

Surfaces :

- **Complexe simplicial** (sommets, arêtes, triangles)
- Localement homéomorphe à un **disque** ou un **demi-disque**



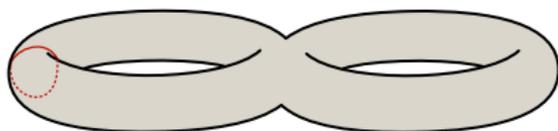
Chemins :

- **Chaînes** : 1-complexes cellulaires homéomorphes à un chemin
- **Cycles** : chaînes sans bord

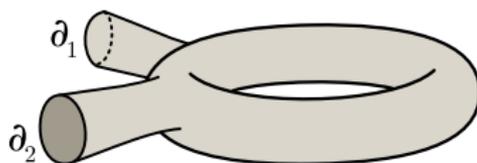
# Importance des lacets non séparants

Découper suivant un lacet non séparant :

- **Diminue le genre** de 1
- Ajoute **deux bords**



Genre : 2 — bords : 0



Genre : 1 — bords : 2

# Structure générale

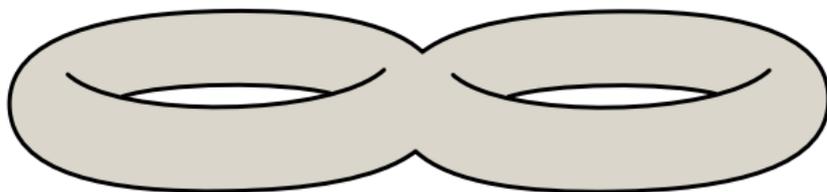
## Découpage optimal — variante<sup>1</sup>

**Entrée :** Une surface  $S$  (non homéomorphe à une boule)

### Début

- **Tant que**  $\text{genre}(S) \neq 0$  **faire**
  - Rechercher le **plus court lacet** / non séparant
  - Découper  $S$  selon /
- Découper suivant l'**arbre couvrant minimal** reliant les bords de  $S$

### Fin



Genre : 2 — bords : 0

<sup>1</sup>Erickson J. et Har-Peled S. *Optimally Cutting a Surface into a Disk*, 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (2002)

# Structure générale

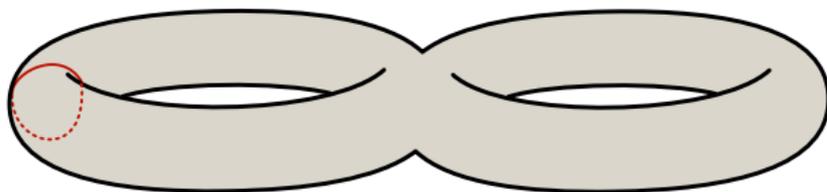
## Découpage optimal — variante<sup>1</sup>

**Entrée** : Une surface  $S$  (non homéomorphe à une boule)

### Début

- **Tant que**  $\text{genre}(S) \neq 0$  **faire**
  - Rechercher le **plus court lacet** / non séparant
  - Découper  $S$  selon /
- Découper suivant l'**arbre couvrant minimal** reliant les bords de  $S$

### Fin



Genre : 1 — bords : 2

<sup>1</sup>Erickson J. et Har-Peled S. *Optimally Cutting a Surface into a Disk*, 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (2002)

# Structure générale

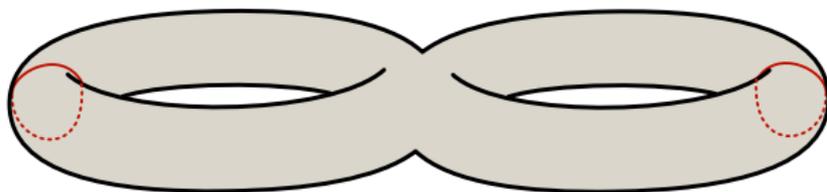
## Découpage optimal — variante<sup>1</sup>

**Entrée :** Une surface  $S$  (non homéomorphe à une boule)

### Début

- **Tant que**  $\text{genre}(S) \neq 0$  **faire**
  - Rechercher le **plus court lacet** / non séparant
  - Découper  $S$  selon /
- Découper suivant l'**arbre couvrant minimal** reliant les bords de  $S$

### Fin



Genre : 0 — bords : 4

<sup>1</sup>Erickson J. et Har-Peled S. *Optimally Cutting a Surface into a Disk*, 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (2002)

# Structure générale

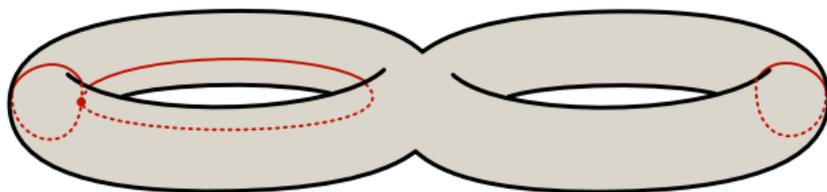
## Découpage optimal — variante<sup>1</sup>

**Entrée :** Une surface  $S$  (non homéomorphe à une boule)

### Début

- **Tant que**  $\text{genre}(S) \neq 0$  **faire**
  - Rechercher le **plus court lacet** / non séparant
  - Découper  $S$  selon /
- Découper suivant l'**arbre couvrant minimal** reliant les bords de  $S$

### Fin



Genre : 0 — bords : 3

<sup>1</sup>Erickson J. et Har-Peled S. *Optimally Cutting a Surface into a Disk*, 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (2002)

# Structure générale

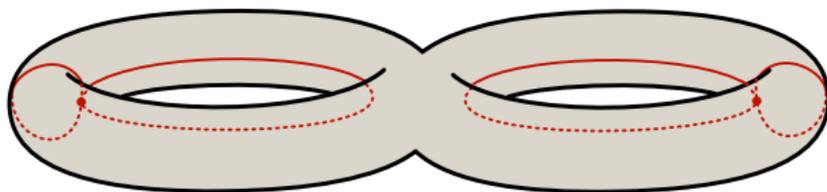
## Découpage optimal — variante<sup>1</sup>

**Entrée :** Une surface  $S$  (non homéomorphe à une boule)

### Début

- **Tant que**  $\text{genre}(S) \neq 0$  **faire**
  - Rechercher le **plus court lacet** / non séparant
  - Découper  $S$  selon /
- Découper suivant l'**arbre couvrant minimal** reliant les bords de  $S$

### Fin



Genre : 0 — bords : 2

<sup>1</sup>Erickson J. et Har-Peled S. *Optimally Cutting a Surface into a Disk*, 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (2002)

# Structure générale

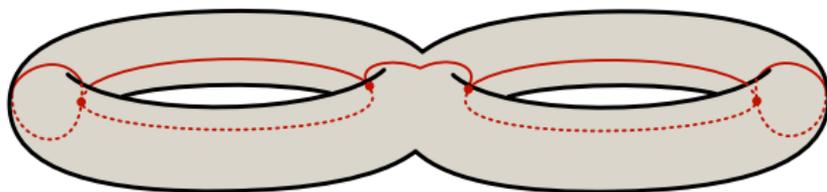
## Découpage optimal — variante<sup>1</sup>

**Entrée :** Une surface  $S$  (non homéomorphe à une boule)

### Début

- **Tant que**  $\text{genre}(S) \neq 0$  **faire**
  - Rechercher le **plus court lacet** / non séparant
  - Découper  $S$  selon /
- Découper suivant l'**arbre couvrant minimal** reliant les bords de  $S$

### Fin



Genre : 0 — bords : 1

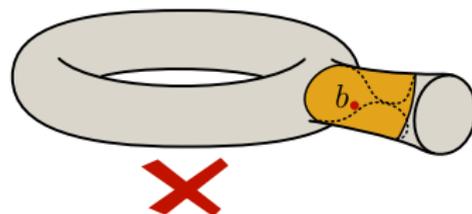
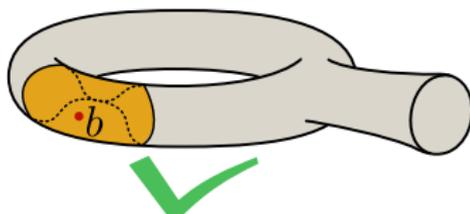
<sup>1</sup>Erickson J. et Har-Peled S. *Optimally Cutting a Surface into a Disk*, 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (2002)

## Algorithme initial

## Calcul du lacet le plus court (1)

Étant donné un **point-base**  $b$

- Utiliser une **distance** « **géodésique** » (ex : Dijkstra<sup>2</sup>)
- **Propagation de front** circulaire
- Détection des **jonctions** (et de leur type)



**Complexité** :  $o(n \log n)$

<sup>2</sup>E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1) :269–271, 1959. ☰

## Calcul du lacet le plus court (2)

Méthode générale :

- Construire un **ensemble  $B$  de points-base** potentiels
- $\forall b \in B$  calculer le **plus court lacet** non séparant
- Retenir le **plus court**

**Complexité** :  $o(|B|n \log n)$

## Calcul du lacet le plus court (2)

Méthode générale :

- Construire un **ensemble**  $B$  de **points-base** potentiels
- $\forall b \in B$  calculer le **plus court lacet** non séparant
- Retenir le **plus court**

### Comment construire $B$ ?

Complexité :  $o(|B|n \log n)$

## Calcul du lacet le plus court (2)

Méthode générale :

- Construire un **ensemble  $B$  de points-base** potentiels
- $\forall b \in B$  calculer le **plus court lacet** non séparant
- Retenir le **plus court**

Comment construire  $B$  ?

**Principe** : ensemble **traversé par tous les lacets** non séparants

**Complexité** :  $o(|B|n \log n)$

## Algorithme initial

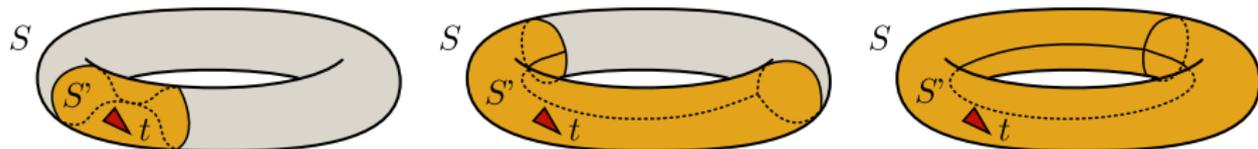
## Calcul du lacet le plus court (3)

**Principe** : ensemble **traversé par tous les lacets** non séparants

**Entrée** : Une surface  $S$  (non homéomorphe à une boule)

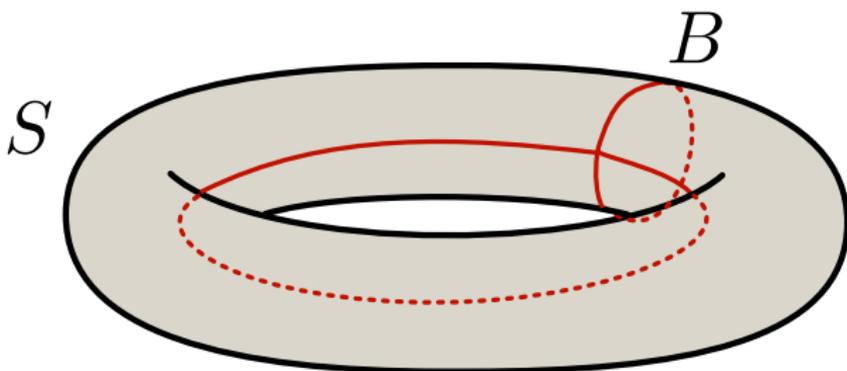
**Début**

- Choisir un triangle  $t$  de départ
- Ajouter  $t$  à une nouvelle surface  $S'$
- **Tant que** tous les triangles ne sont pas visités **faire**
  - Choisir un triangle  $t_i$  non visité adjacent à un triangle visité
  - Recoller  $t_i$  à ses voisins sur  $S'$  (préserver **genre de  $S' : 0$** )
- $B$  : liste des points bords de  $S'$

**Fin**

# Dijkstra tronqué

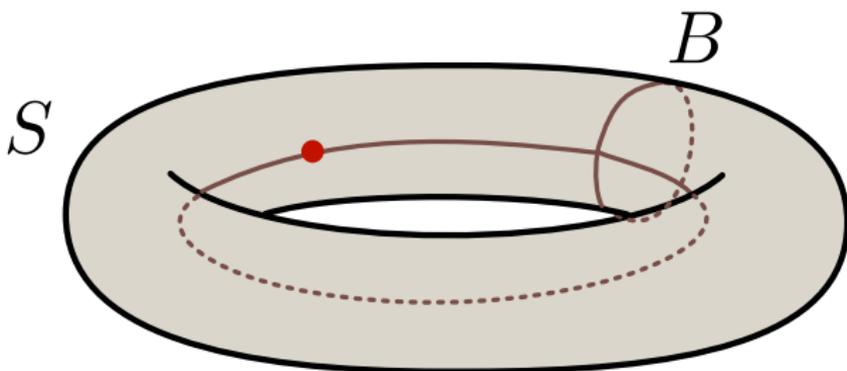
**Principe** : ne pas aller trop loin



Pendant le calcul du plus court chemin...

# Dijkstra tronqué

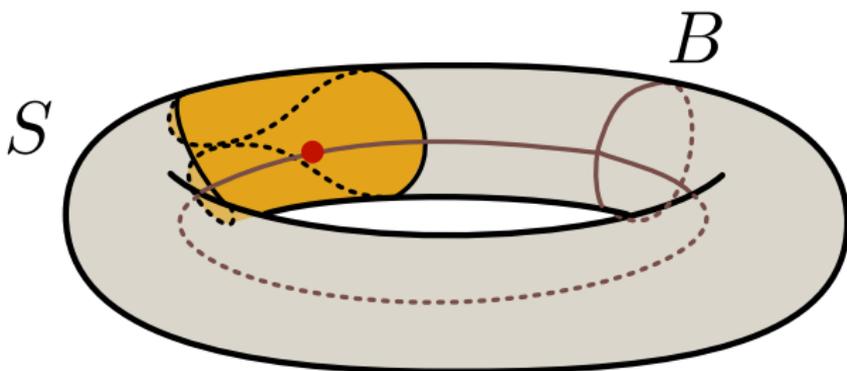
**Principe** : ne pas aller trop loin



Pendant le calcul du plus court chemin...

# Dijkstra tronqué

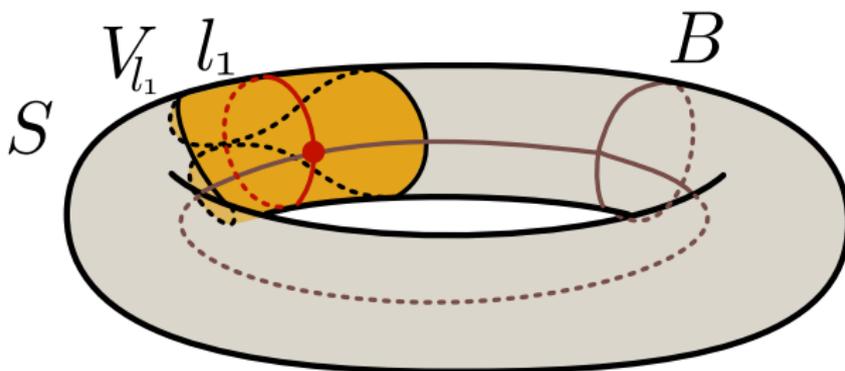
**Principe** : ne pas aller trop loin



Pendant le calcul du plus court chemin...

# Dijkstra tronqué

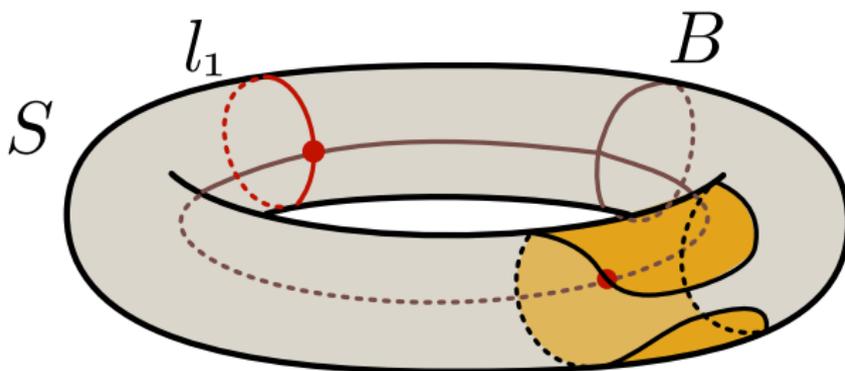
**Principe** : ne pas aller trop loin



Pendant le calcul du plus court chemin...

# Dijkstra tronqué

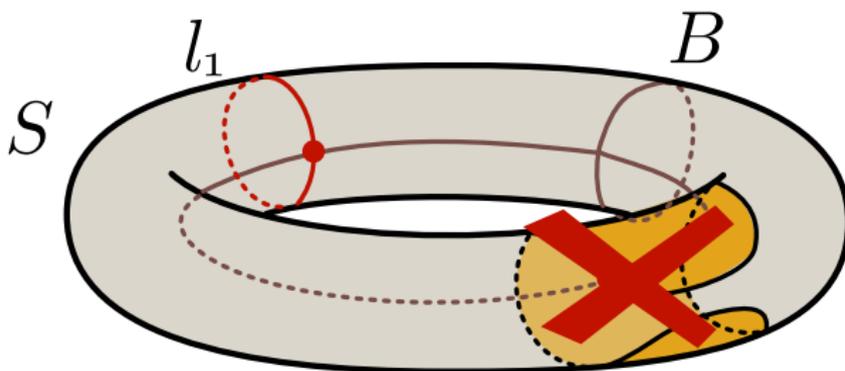
**Principe** : ne pas aller trop loin



Pendant le calcul du plus court chemin...

# Dijkstra tronqué

**Principe** : ne pas aller trop loin



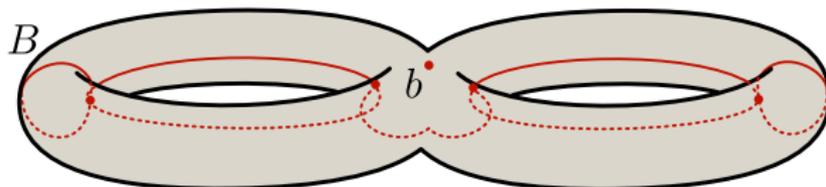
Pendant le calcul du plus court chemin...  
tenir compte des longueurs passées

**Complexité** :  $o(n \log n + |B| m \log m)$  avec  $m$  nombre de points du plus grand  $V_{l_i}$

# Ordonner les points

On utilise les étapes précédentes  $\Rightarrow$  **ordonner** les points-base :

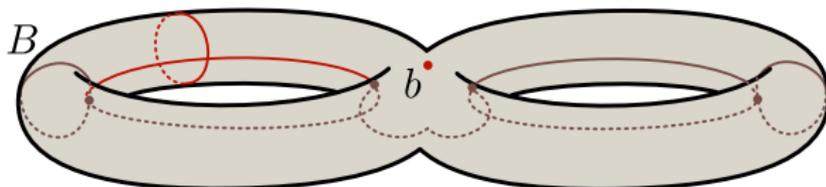
- **Pré-sélectionner** des points-base intéressants
- Utiliser la **structure de  $B$**



# Ordonner les points

On utilise les étapes précédentes  $\Rightarrow$  **ordonner** les points-base :

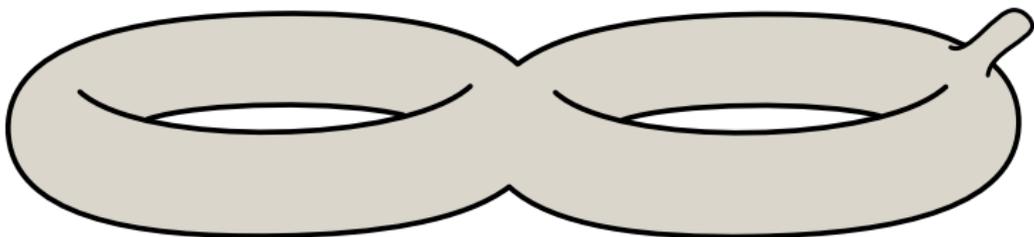
- **Pré-sélectionner** des points-base intéressants
- Utiliser la **structure de  $B$**



$\Rightarrow$  Une approximation de lacet par chemin de  $B$

# Longueur minimum

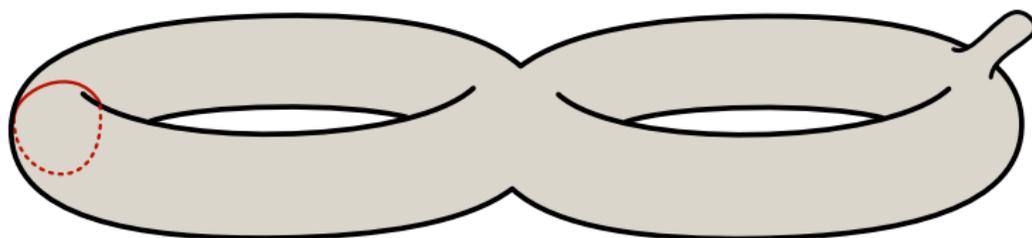
**Principe** : ne pas commencer trop tôt



Surface de genre 2

# Longueur minimum

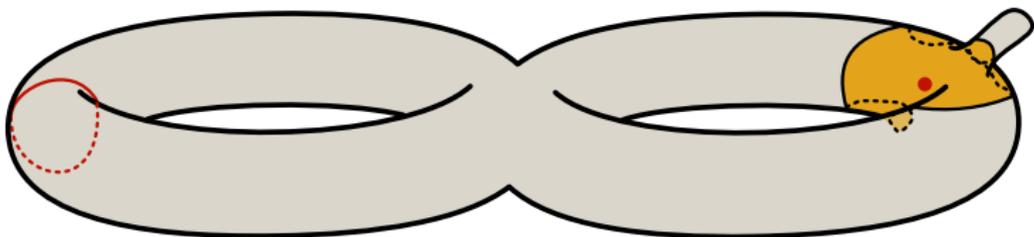
**Principe** : ne pas commencer trop tôt



Premier découpage — Genre : 1

# Longueur minimum

**Principe** : ne pas commencer trop tôt



Recherche du second lacet : **ignorer les jonctions** trop courtes

## 1 Algorithme

- Algorithme initial
- Améliorations

## 2 Variations sur la distance

- Influence de la géométrie
- Spécificités de l'application

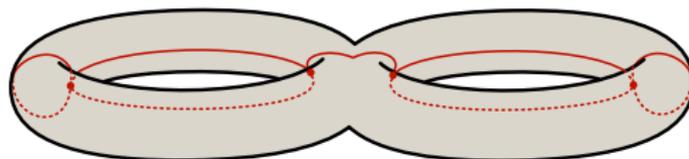
## 3 Résultats

- Efficacité de l'amélioration
- Régularité de la paramétrisation
- Cartographie et aide à la correction topologique

# Topologie & géométrie

Découpage **topologique**, avec notion géométrique :

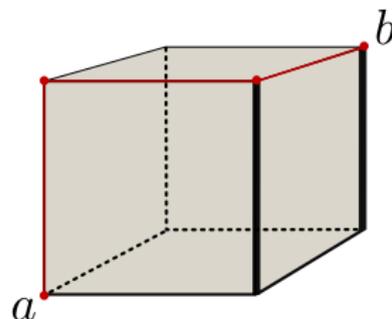
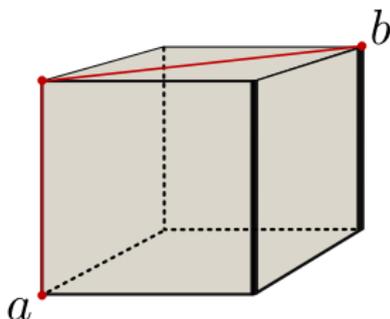
- Longueur des **lacets**
- Dépend de la **longueur des arêtes** (Dijkstra)
- Sous-entendu : distance dans  $\mathbb{R}^3$  :  $l_3(e)$



Pendant, d'autres choix sont possibles

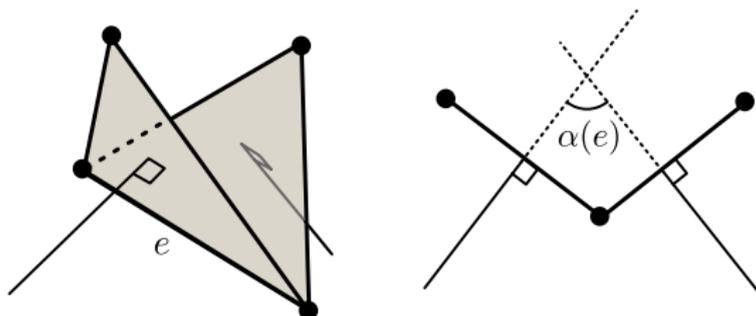
# Utilisation de la courbure

Favoriser les fortes **courbures** locales



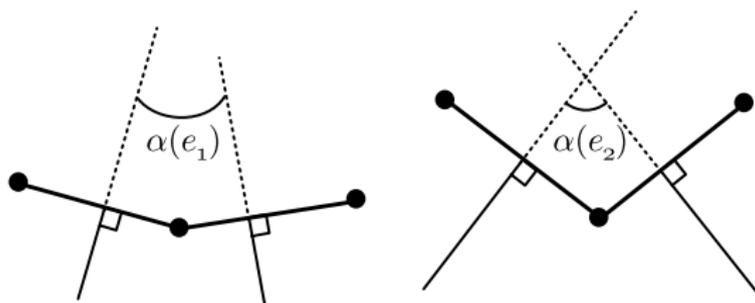
# Utilisation de la courbure

Favoriser les fortes **courbures** locales



# Utilisation de la courbure

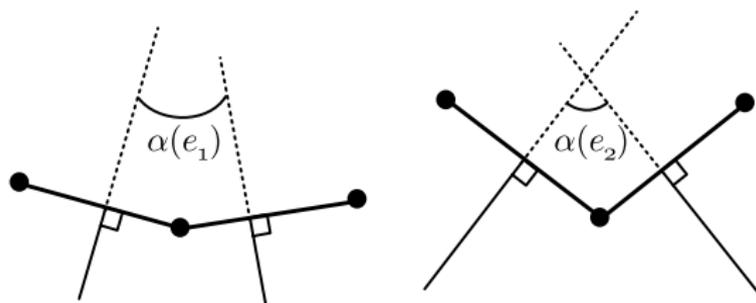
Favoriser les fortes **courbures** locales



$$\alpha(e_1) < \alpha(e_2) \Leftrightarrow l(e_1) > l(e_2)$$

# Utilisation de la courbure

Favoriser les fortes **courbures** locales



$$\alpha(e_1) < \alpha(e_2) \Leftrightarrow l(e_1) > l(e_2)$$

$$l(e) = l_3(e) \times \left(1 - c \frac{|\alpha(e)|}{\pi}\right)$$

avec  $c$  constante

# Méthode semi-automatique

## Application : infographie

- Compétences pointues
- Découpages esthétiques et techniques

# Méthode semi-automatique

## Application : infographie

- Compétences pointues
- Découpages esthétiques et techniques

⇒ automatisation partielle

# Méthode semi-automatique

## Application : infographie

- Compétences pointues
- Découpages esthétiques et techniques

⇒ automatisation partielle

## Proposition : peinture $[0; 1]$ sur la surface

- $c(e) = 0$  : à découper
- $c(e) = 1$  : à ne pas découper
- $c(e) = 0,5$  : indifférent

# Méthode semi-automatique

## Application : infographie

- Compétences pointues
- Découpages esthétiques et techniques

⇒ automatisation partielle

## Proposition : peinture $[0; 1]$ sur la surface

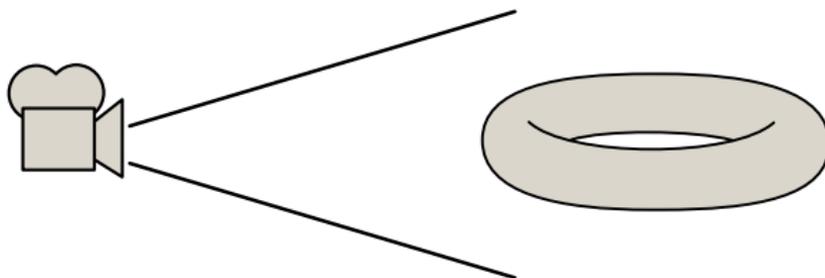
- $c(e) = 0$  : à découper
- $c(e) = 1$  : à ne pas découper
- $c(e) = 0,5$  : indifférent

$$l(e) = l_3(e) \times (2c(e))^n$$

avec  $n$  constante

# Utilisation de la visibilité

**Application** : infographie, rendu

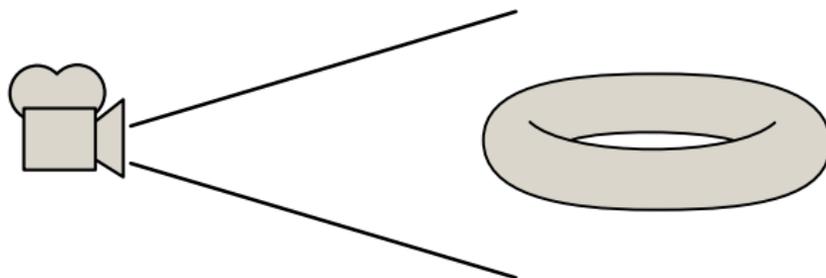


---

<sup>3</sup>A. Sheffer and J. C. Hart. *Seamster : inconspicuous low-distortion texture seam layout*. VIS '02 : Proceedings of the conference on Visualization '02, 2002.

# Utilisation de la visibilité

**Application** : infographie, rendu



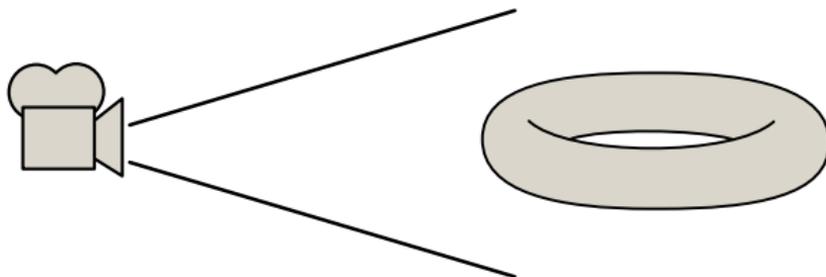
Utiliser la **visibilité** des arêtes<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>A. Sheffer and J. C. Hart. *Seamster : inconspicuous low-distortion texture seam layout*. VIS '02 : Proceedings of the conference on Visualization '02, 2002.

# Utilisation de la visibilité

**Application** : infographie, rendu



Utiliser la **visibilité** des arêtes<sup>3</sup>

$$I(e) = I_3(e) \times v(e)$$

---

<sup>3</sup>A. Sheffer and J. C. Hart. *Seamster : inconspicuous low-distortion texture seam layout*. VIS '02 : Proceedings of the conference on Visualization '02, 2002.

## 1 Algorithme

- Algorithme initial
- Améliorations

## 2 Variations sur la distance

- Influence de la géométrie
- Spécificités de l'application

## 3 Résultats

- Efficacité de l'amélioration
- Régularité de la paramétrisation
- Cartographie et aide à la correction topologique

# Résultats expérimentaux

	<b>Cortex (a)</b>	<b>Synthétique (b)</b>
sans amélioration	6 m 33 s	16,06 s
avec améliorations	51,8 s	2,24 s

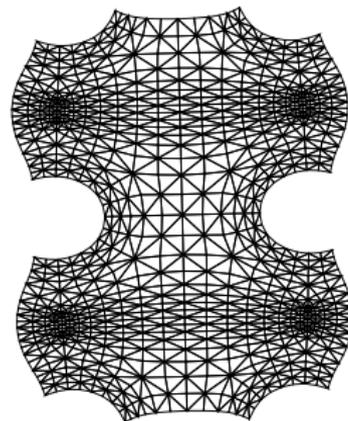
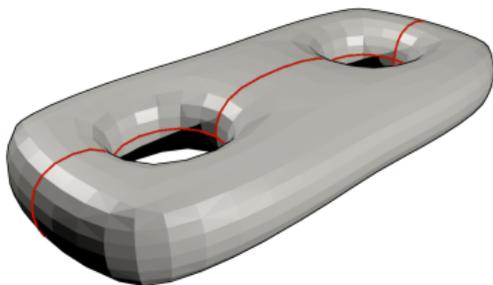
- Matériel : PC 2.8 Ghz
- (a) : 3 220 points, 6 264 triangles, genre 24 et 5 bords
- (b) : 2 202 points, 4 416 triangles, genre 4

# Paramétrisation conforme

**Donnée** : surface de **genre 0** et à **un bord**

**Méthode** : Angle Based Flatening (ABF)<sup>4</sup>

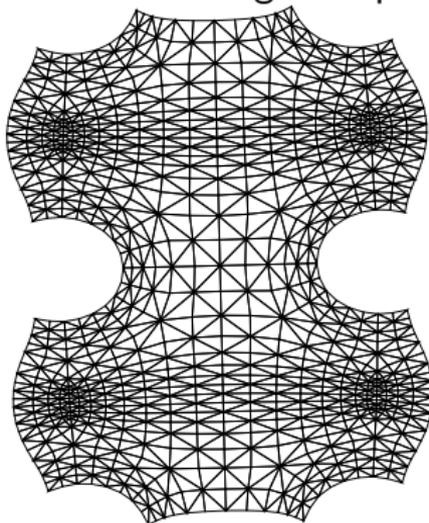
- Correspondance surface  $\Leftrightarrow C \subset \mathbb{R}^2$
- Forme du bord libre dans  $\mathbb{R}^2$
- Ratios des angles respectés
- Bijection locale



<sup>4</sup>Rhaleb Zayer, Bruno Lévy et Hans-Peter Seidel, *Linear Angle Based Parameterization*, ACM/EG Symposium on Geometry Processing conference proceedings, 2007

# Distorsions en aire

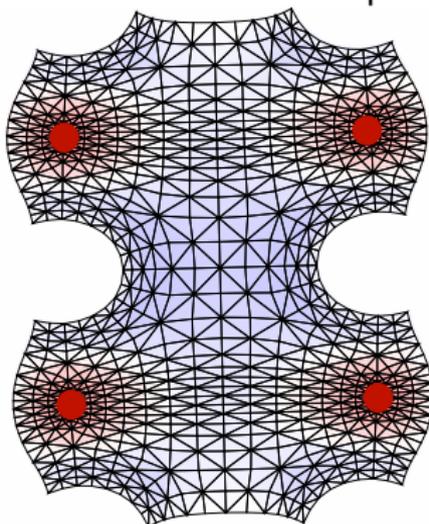
Distorsion des triangles importante



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Cutting an Organic Surface*, EuroCG'09  
(soumis)

# Distorsions en aire

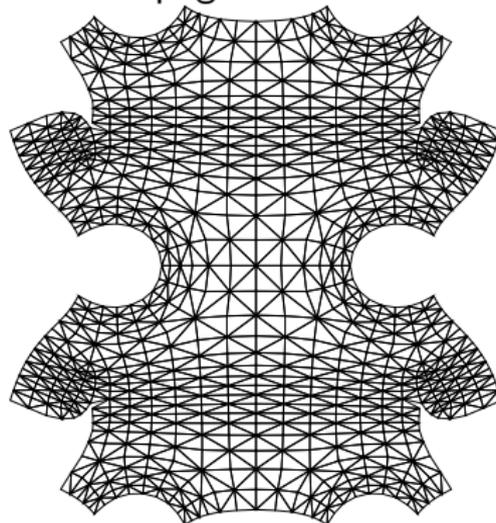
Détection des zones compressées



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Cutting an Organic Surface*, EuroCG'09  
(soumis)

# Distorsions en aire

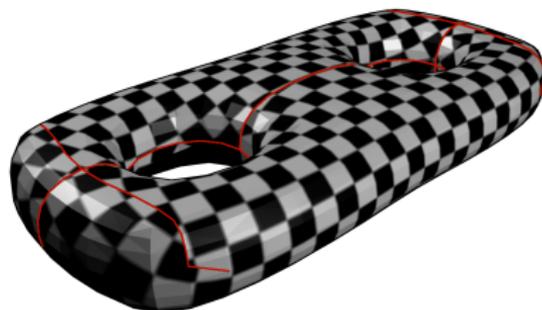
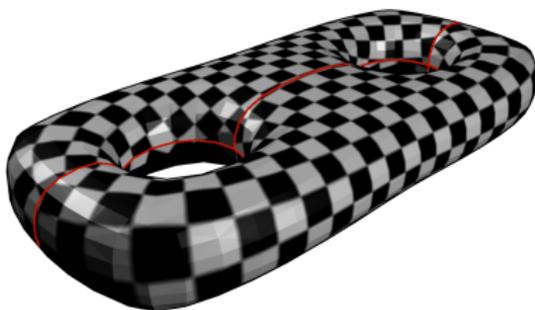
Découpage de la surface



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Cutting an Organic Surface*, EuroCG'09  
(soumis)

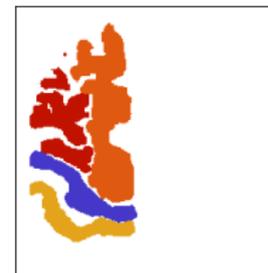
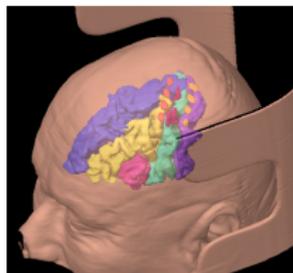
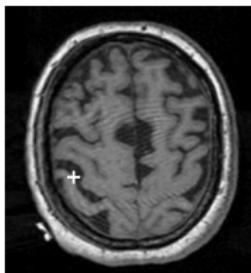
# Illustration

Régularité de la texture



# Application médicale — contexte

## Stimulation corticale, localisation des électrodes



### Données disponibles :

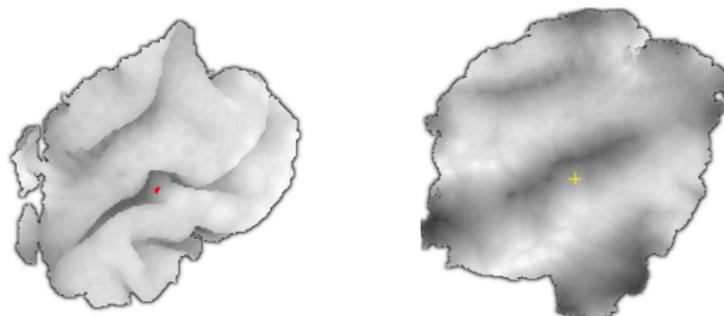
- IRM anatomique
- Position 3D des électrodes
- Informations sur les zones fonctionnelles

### Prétraitements : Segmentation, reconstruction de surface

# Représentation planaire de la surface du cortex

Outil de visualisation : **carte planaire**

- Découpage topologique (genre : 0, bord : 1)
- Dépliage (méthodes conformes ou quasi-conformes<sup>5</sup>)
- **Projection de données**

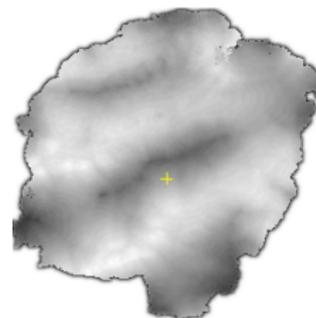
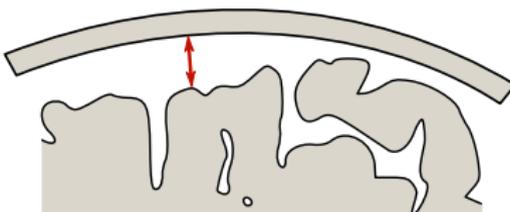


<sup>5</sup>Collins, C. R. et Stephenson, K. *A Circle Packing Algorithm*, Computational Geometry : Theory and Applications (2003)

# Représentation planaire de la surface du cortex

Outil de visualisation : **carte planaire**

- Découpage topologique (genre : 0, bord : 1)
- Dépliage (méthodes conformes ou quasi-conformes<sup>5</sup>)
- **Projection de données**

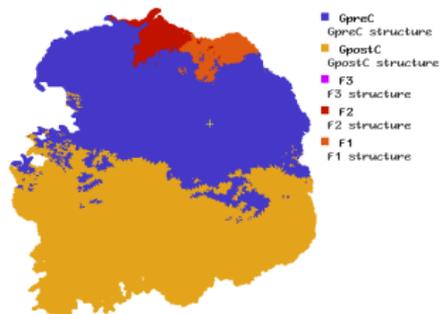
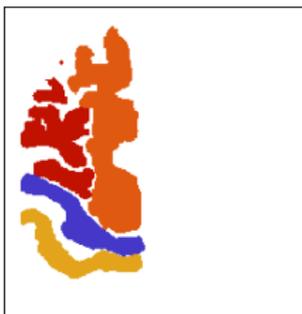


<sup>5</sup>Collins, C. R. et Stephenson, K. *A Circle Packing Algorithm*, Computational Geometry : Theory and Applications (2003)

# Représentation planaire de la surface du cortex

## Outil de visualisation : **carte planaire**

- Découpage topologique (genre : 0, bord : 1)
- Dépliage (méthodes conformes ou quasi-conformes<sup>5</sup>)
- **Projection de données**

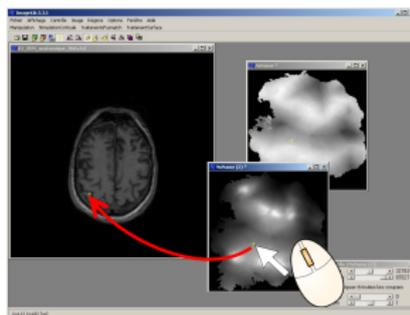


<sup>5</sup>Collins, C. R. et Stephenson, K. *A Circle Packing Algorithm*, Computational Geometry : Theory and Applications (2003)

# Représentation planaire de la surface du cortex

Outil de visualisation : **carte planaire**

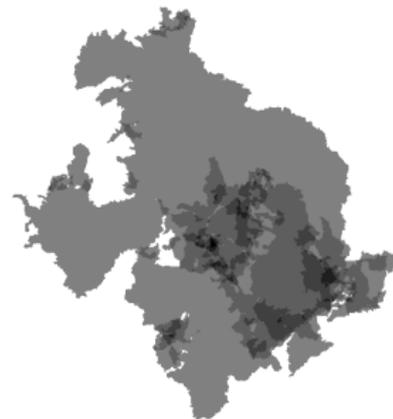
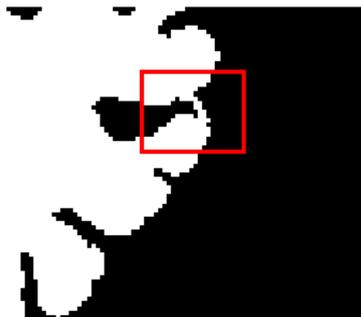
- Découpage topologique (genre : 0, bord : 1)
- Dépliage (méthodes conformes ou quasi-conformes<sup>5</sup>)
- **Projection de données**



<sup>5</sup>Collins, C. R. et Stephenson, K. *A Circle Packing Algorithm*, Computational Geometry : Theory and Applications (2003)

# Corrections topologiques

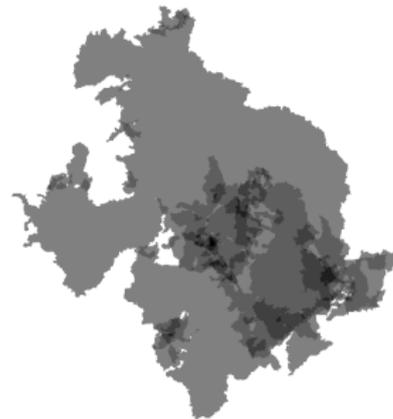
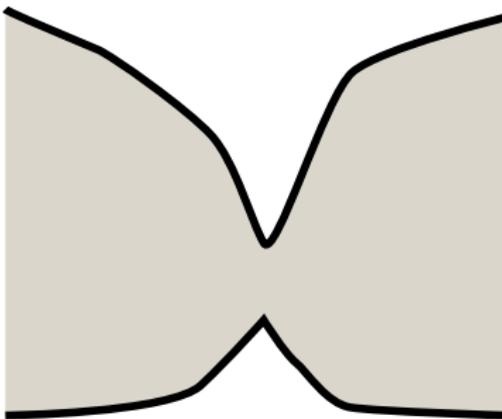
Segmentation imparfaite  $\Rightarrow$  cartes inexploitables



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Low-resolution Surface Mapping : a Topological and Geometrical Approach*, EuroCG'09 (soumis)

# Corrections topologiques

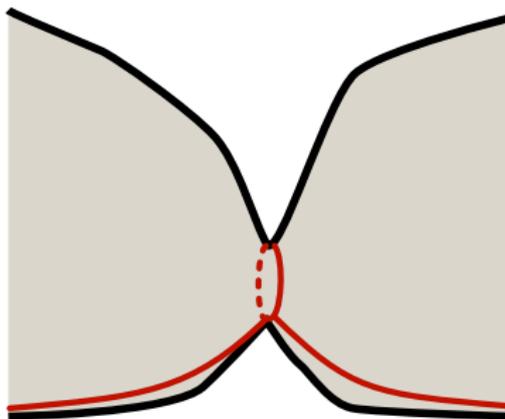
Segmentation imparfaite  $\Rightarrow$  cartes inexploitables



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Low-resolution Surface Mapping : a Topological and Geometrical Approach*, EuroCG'09 (soumis)

# Corrections topologiques

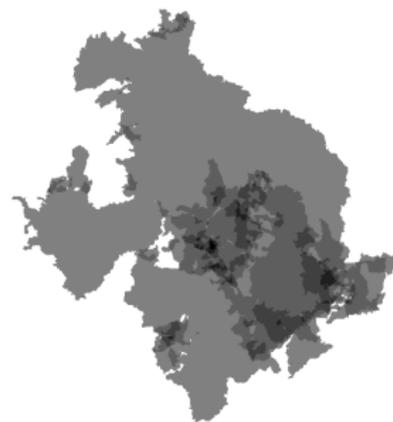
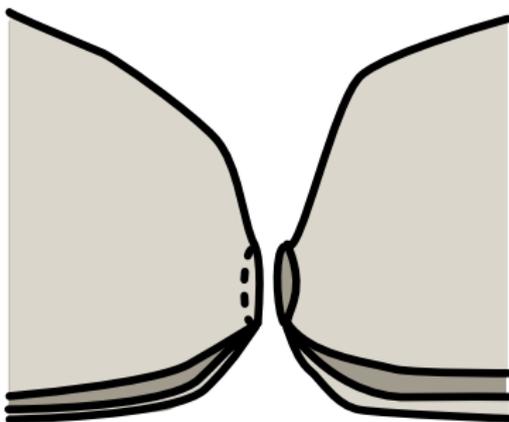
Segmentation imparfaite  $\Rightarrow$  cartes inexploitables



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Low-resolution Surface Mapping : a Topological and Geometrical Approach*, EuroCG'09 (soumis)

# Corrections topologiques

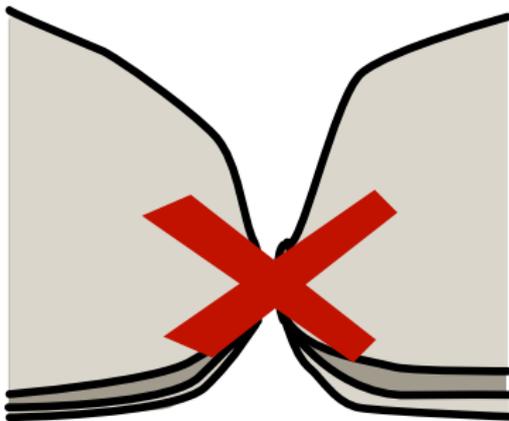
Segmentation imparfaite  $\Rightarrow$  cartes inexploitables



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Low-resolution Surface Mapping : a Topological and Geometrical Approach*, EuroCG'09 (soumis)

# Corrections topologiques

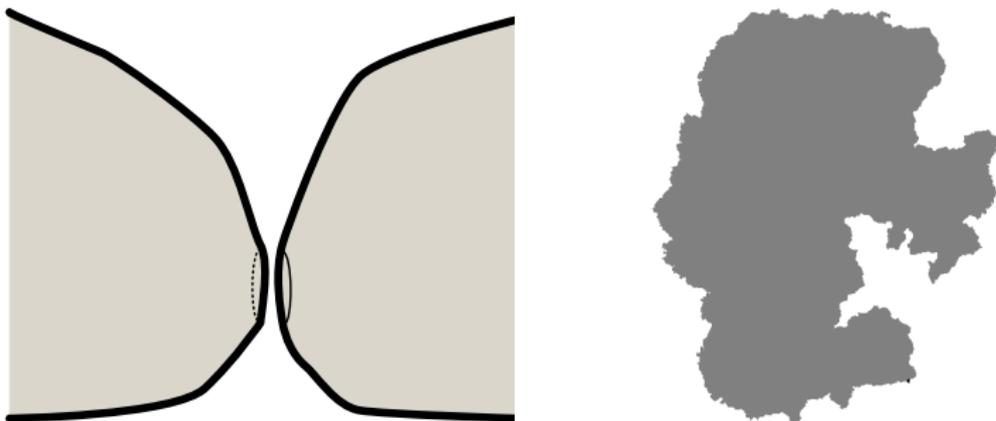
Segmentation imparfaite  $\Rightarrow$  cartes inexploitables



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Low-resolution Surface Mapping : a Topological and Geometrical Approach*, EuroCG'09 (soumis)

# Corrections topologiques

Segmentation imparfaite  $\Rightarrow$  cartes inexploitables  
 $\Rightarrow$  **corrections topologiques**



Jean-Marie Favreau, Vincent Barra, *Low-resolution Surface Mapping : a Topological and Geometrical Approach*, EuroCG'09 (soumis)

1

## Algorithme

- Algorithme initial
- Améliorations

2

## Variations sur la distance

- Influence de la géométrie
- Spécificités de l'application

3

## Résultats

- Efficacité de l'amélioration
- Régularité de la paramétrisation
- Cartographie et aide à la correction topologique

# Conclusion et perspectives

- **Amélioration** de la recherche du **plus court lacet** non séparant :  
 $o(n \log n + |B| m \log m)$
- Algorithme **utilisable pratiquement**
- Plusieurs applications déjà envisagées
- Ouvertures vers **d'autres découpages** (quadrangles<sup>6</sup>, etc.)

---

<sup>6</sup>Jean-Marie Favreau, Thibault Marzais, Yan Gérard, Vincent Barra, *Tiling Surfaces with M-Tiles : a Topological Framework with Applications*, Computational Geometry, Theory & Applications (soumis)