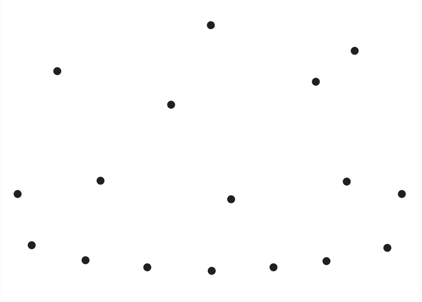
Construction de la triangulation de Delaunay de segments par un algorithme de flip

Mathieu Brévilliers

Laboratoire LMIA
Université de Haute-Alsace

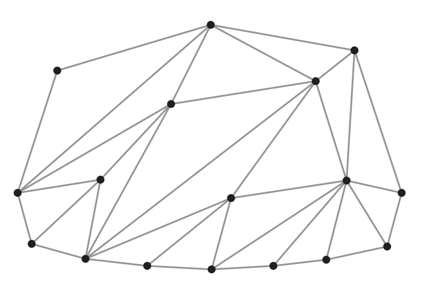
Triangulations de points

Triangulation quelconque



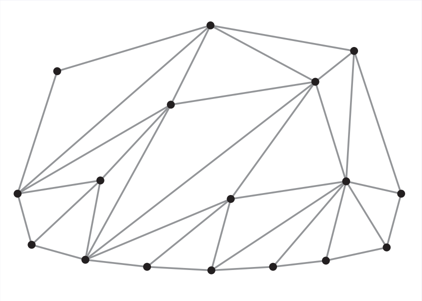
Triangulations de points

Triangulation quelconque

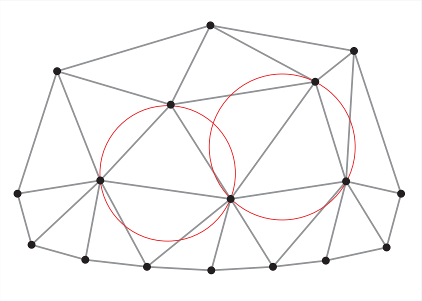


Triangulations de points

Triangulation quelconque

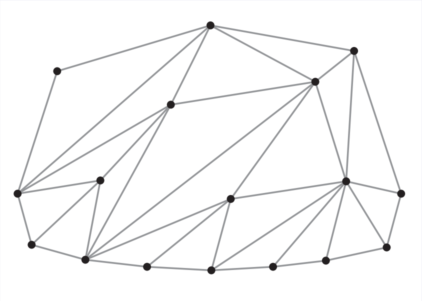


Triangulation de Delaunay

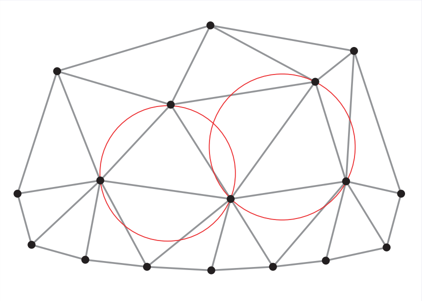


Triangulations de points

Triangulation quelconque



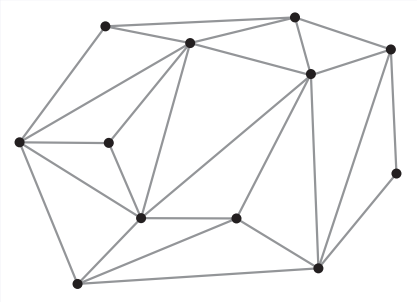
Triangulation de Delaunay



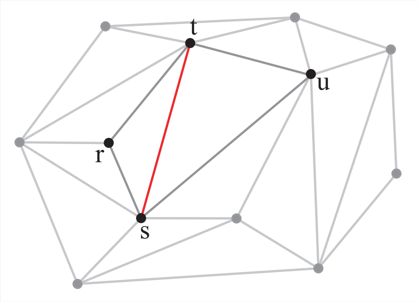
Régularité

La triangulation de Delaunay maximise le minimum des angles des triangles.

Légalité d'une arête

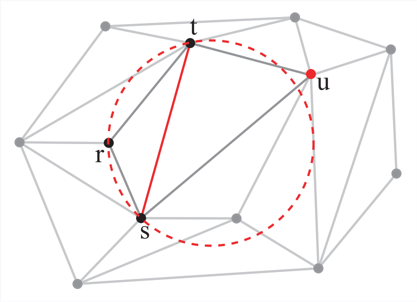


Légalité d'une arête

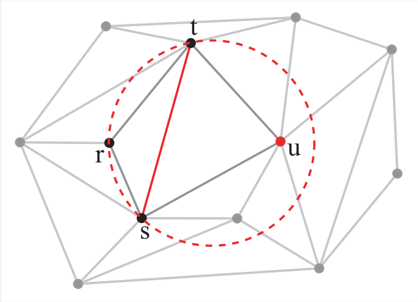


Légalité d'une arête

Arête légale

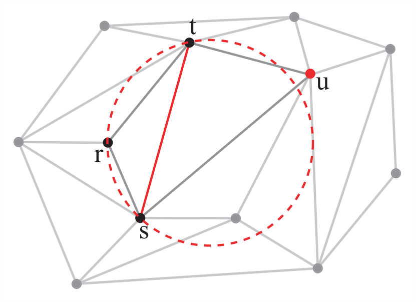


Arête illégale

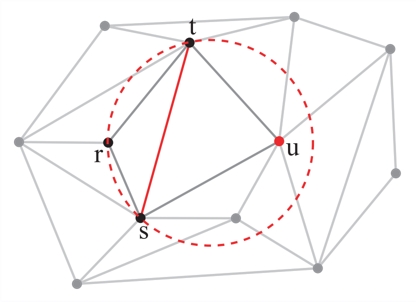


Légalité d'une arête

Arête légale



Arête illégale

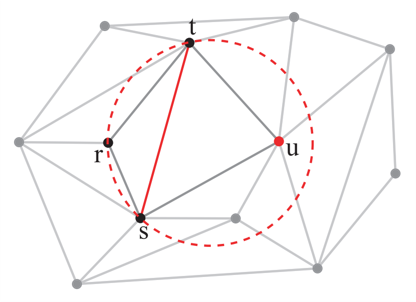


Théorème

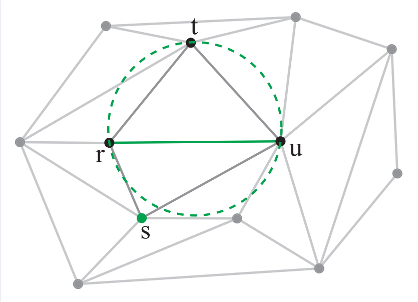
La triangulation de Delaunay de S est la seule triangulation de S dont toutes les arêtes sont légales.

Algorithme de flip

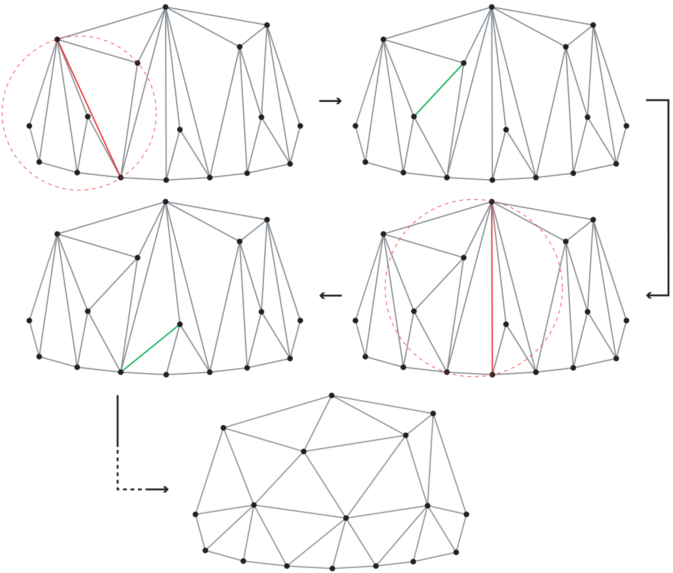
Arête illégale



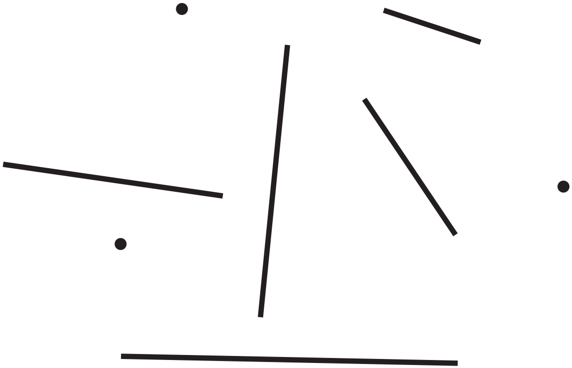
Arête légale



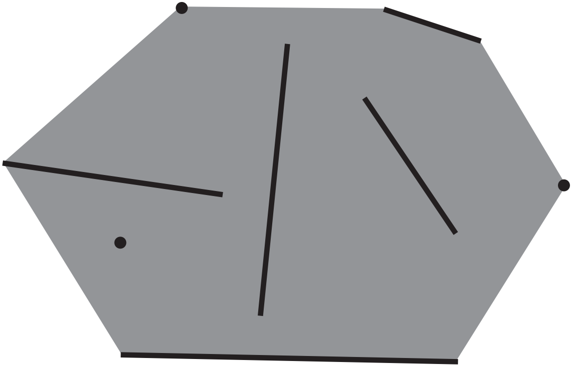
Exemple



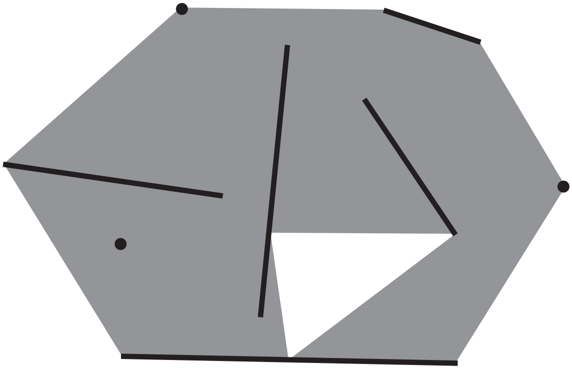
Triangulation de segments



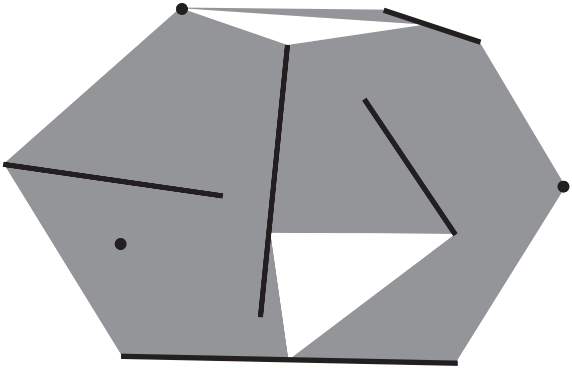
Triangulation de segments



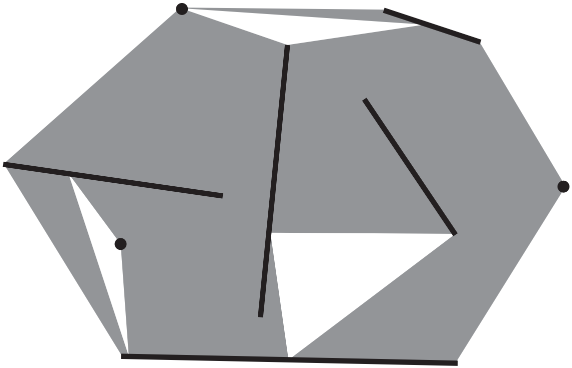
Triangulation de segments



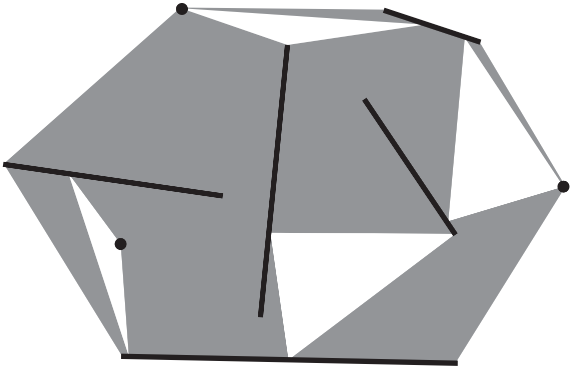
Triangulation de segments



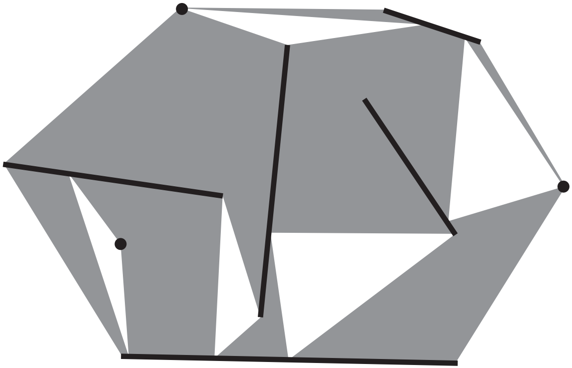
Triangulation de segments



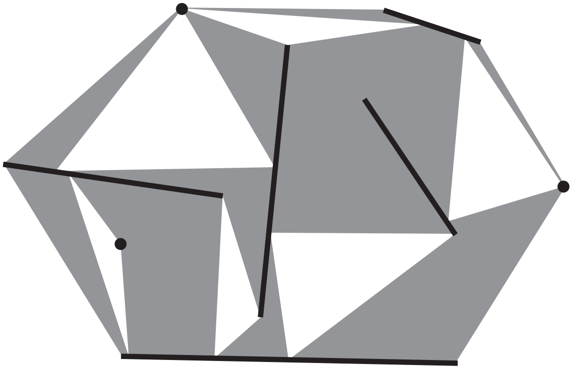
Triangulation de segments



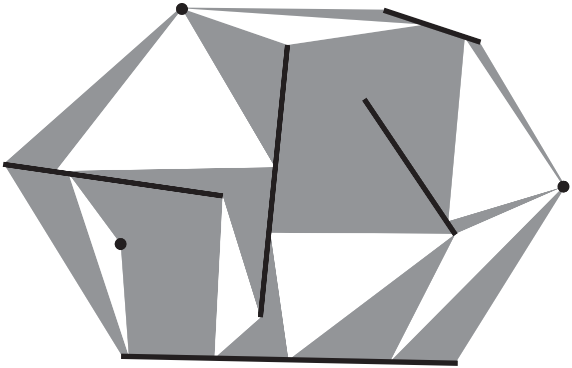
Triangulation de segments



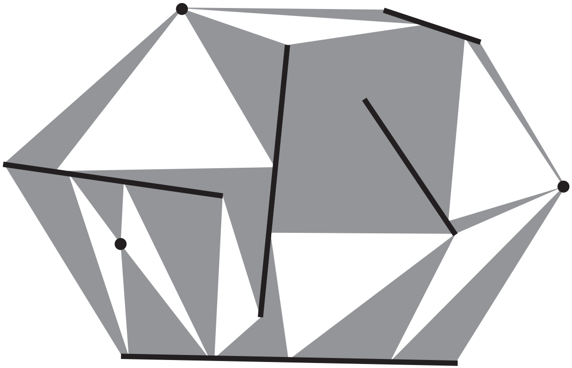
Triangulation de segments



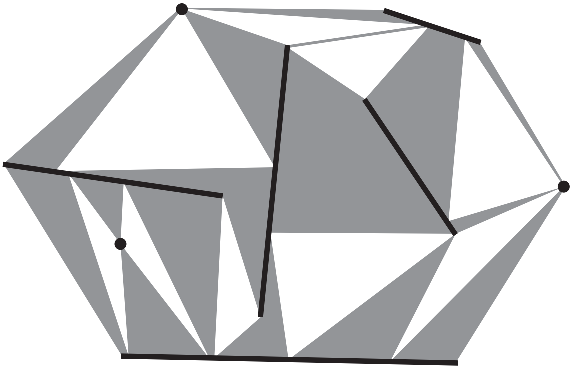
Triangulation de segments



Triangulation de segments

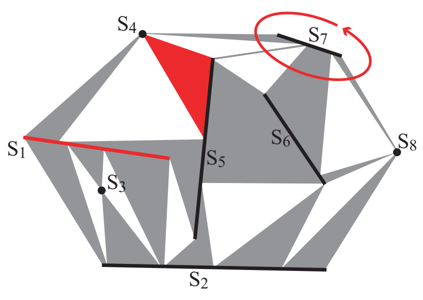


Triangulation de segments

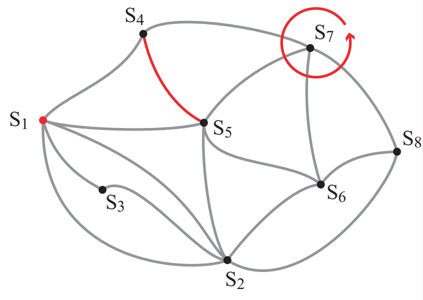


Propriétés topologiques

Triangulation de segments



Carte



Propriétés topologiques

Théorème

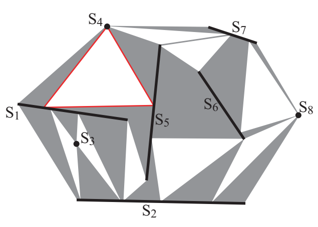
Pour tout ensemble S de n sites, soit n' le nombre de côtés de l'enveloppe convexe de S qui sont pas des sites.

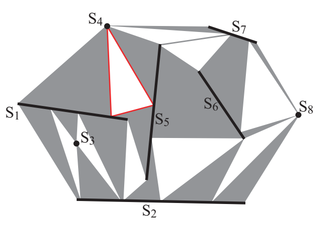
Toute triangulation de segments de S admet :

- $2n - n' - 2$ faces et
- $3n - n' - 3$ arêtes.

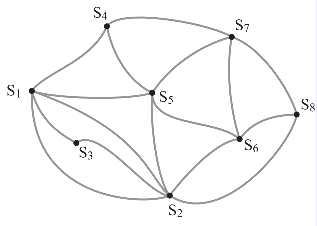
Propriétés topologiques

Triangulations de segments

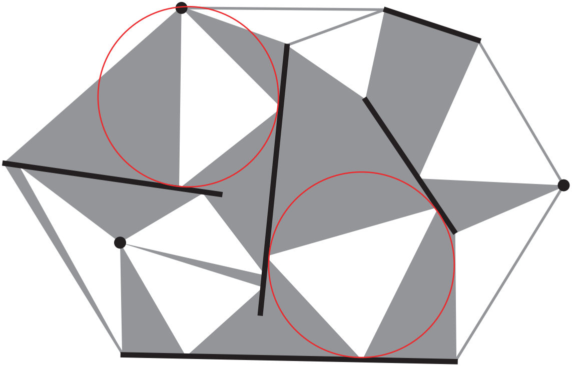




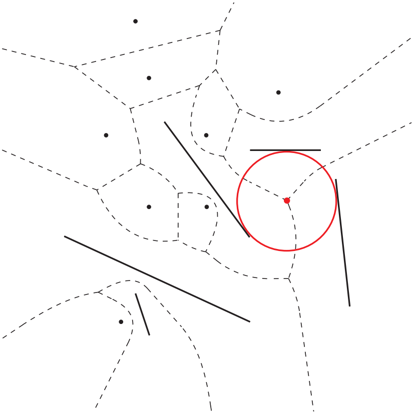
Carte combinatoire

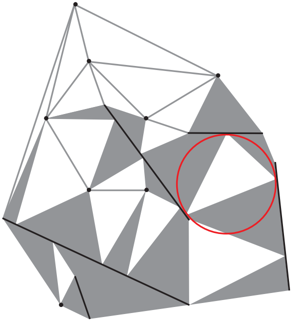


Triangulation de Delaunay de segments



Dualité



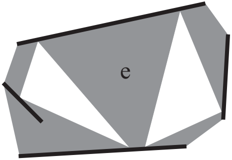


Théorème

La triangulation de Delaunay de segments de S est duale du diagramme de Voronoï de segments de S.

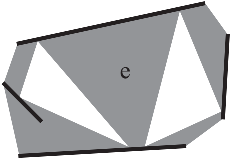
Légalité d'une arête

Exemple 1

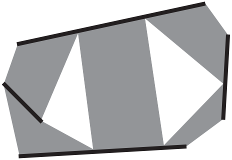


Légalité d'une arête

Exemple 1

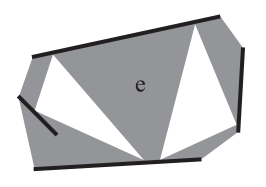


Arête légale

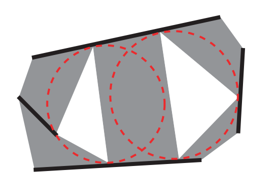


Légalité d'une arête

Exemple 1

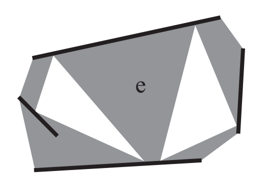


Arête légale

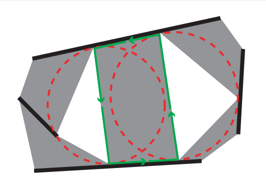


Légalité d'une arête

Exemple 1

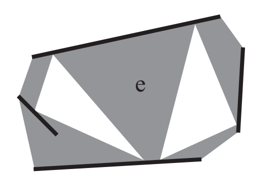


Arête légale

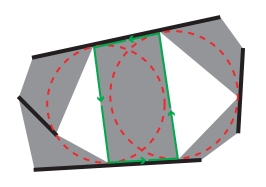


Légalité d'une arête

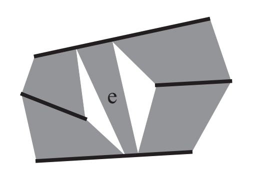
Exemple 1



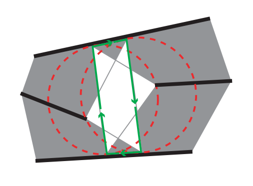
Arête légale



Exemple 2



Arête illégale

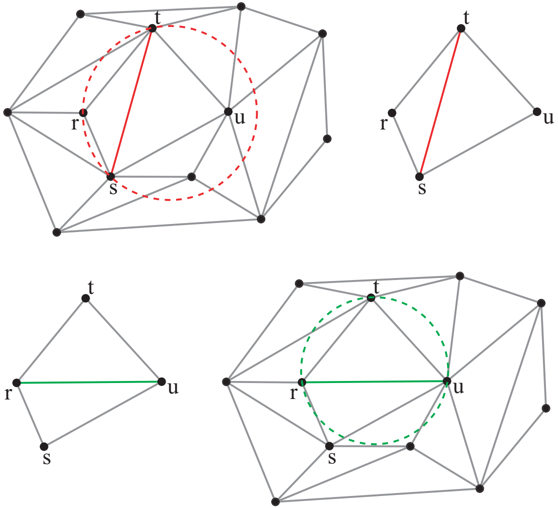


Légalité d'une arête

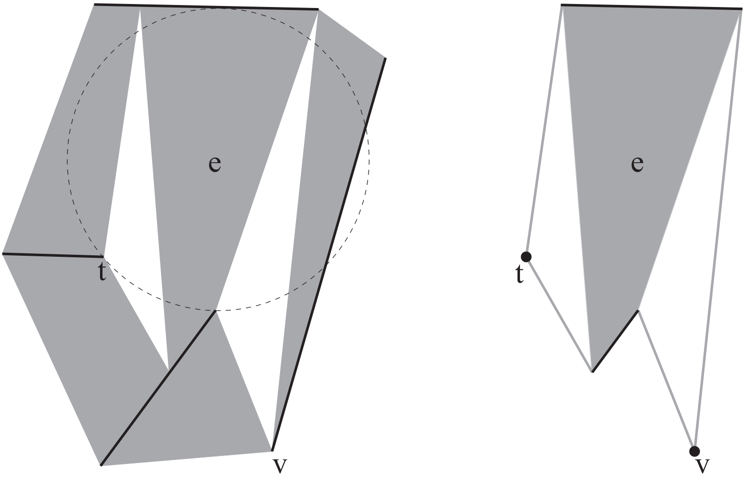
Théorème

Une triangulation de segments dont toutes les arêtes sont légales a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments.

Algorithme de flip

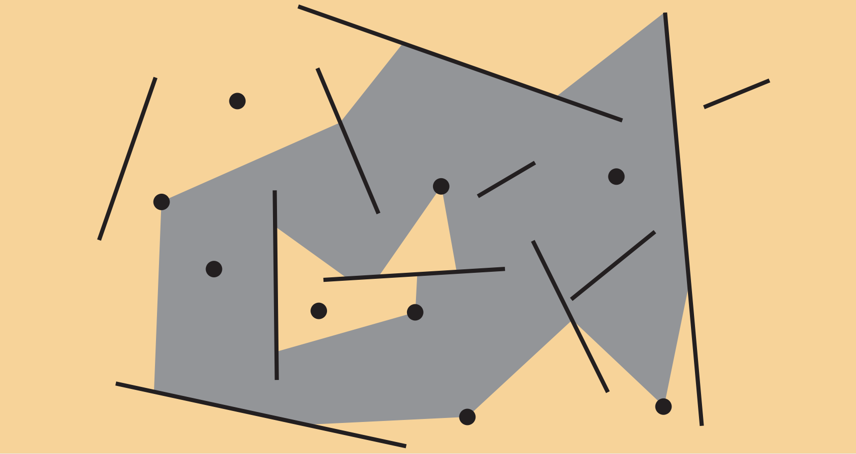


Algorithme de flip



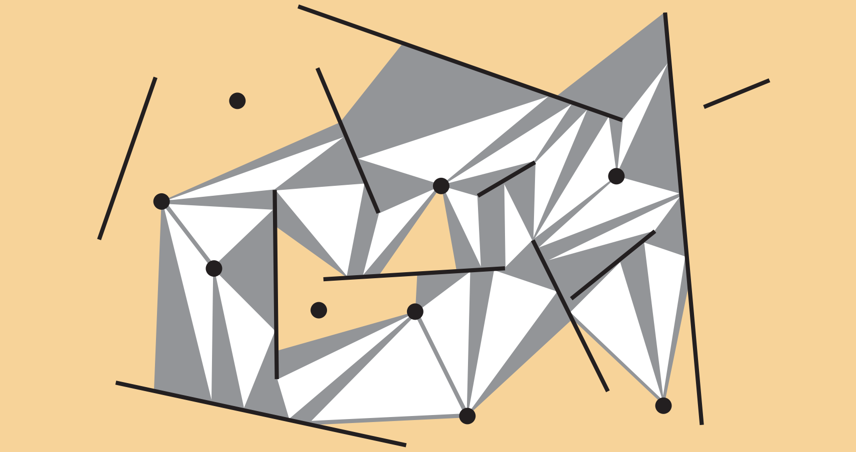
Triangulations de S-polygones

Un S-polygone

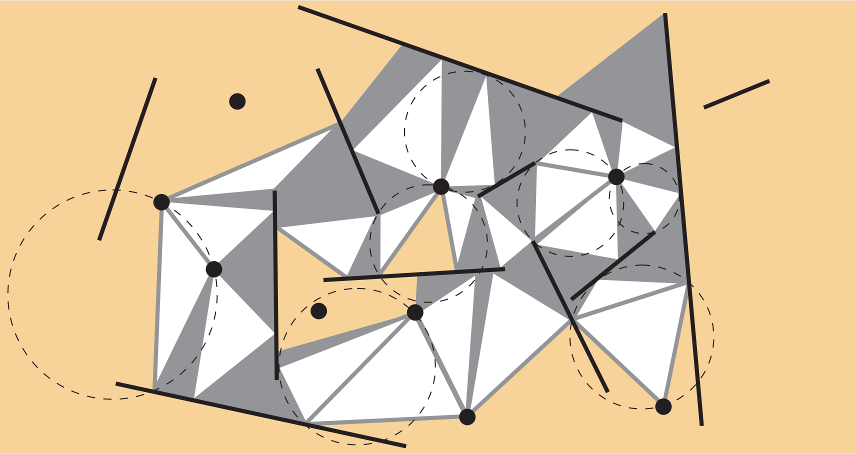


Triangulations de S-polygones

Une triangulation de segments d'un S-polygone



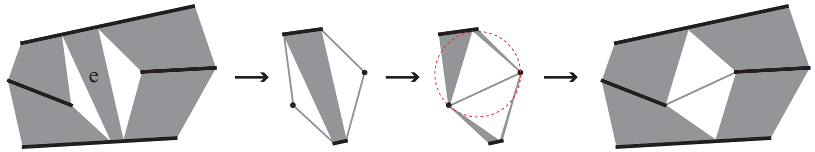
Une triangulation de Delaunay de segments d'un S-polygone



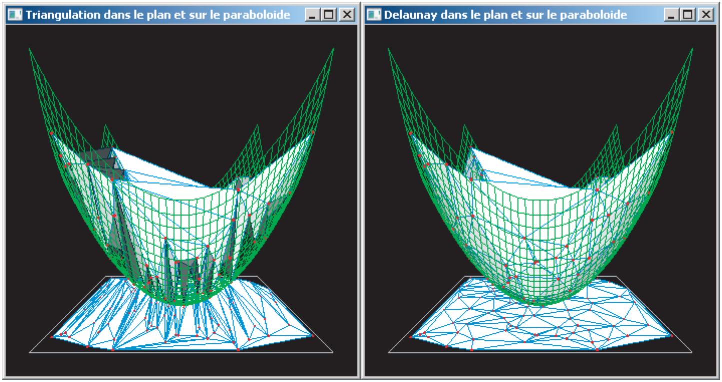
Algorithme de flip

- Au départ : une triangulation de segments de S.
- L'algorithme traite toutes les arêtes en boucle.
- Pour chaque arête, on calcule la triangulation de Delaunay de segments de son polygone associé.

Exemple d'étape de l'algorithme



Étude du relèvement d'une triangulation



Fonctions localement convexes

Fonction localement convexe

Si U est une région de $\mathbf{R}^2$, une fonction $\phi : U \to \mathbf{R}$ est localement convexe si elle est convexe sur tout segment inclus dans U.

Fonctions localement convexes

Fonction localement convexe

Si U est une région de $\mathbf{R}^2$, une fonction $\phi : U \to \mathbf{R}$ est localement convexe si elle est convexe sur tout segment inclus dans U.

Enveloppe convexe inférieure d'une fonction

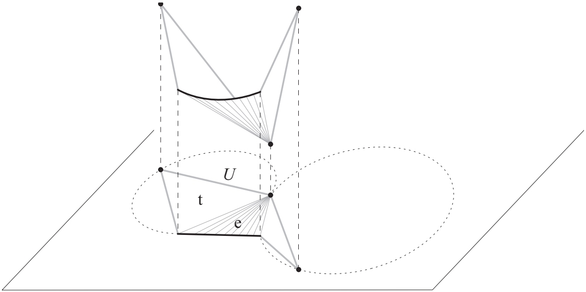
Étant donnés un S-polygone U et une fonction $f : U \cap S \to \mathbf{R}$, l'enveloppe convexe inférieure de f sur (U, S), notée $f_{U,S}$, est la plus grande fonction localement convexe sur U telle que $f_{U,S} \leq f$ sur $U \cap S$.

Relèvements des triangulations de segments de U

Définition

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de segments de U. La fonction $f_{U,S,\mathcal{T}} : U \to \mathbf{R}$ est définie de la manière suivante :

– $f_{U,S,\mathcal{T}}(p) = f(p)$ si p est un point de S,
– $f_{U,S,\mathcal{T}}(p) = f_{\overline{t},S}(p)$ si p est dans une face t de $\mathcal{T}$,
– $f_{U,S,\mathcal{T}}(p) = f_{\overline{e},S}(p)$ si p est dans une arête e de $\mathcal{T}$.



Théorème

- Si $\mathcal{T}$ est la triangulation de Delaunay de segments de U, alors
$$f_{U,S,\mathcal{T}} = f_{U,S}.$$
- Pour toute triangulation de segments $\mathcal{T}$ de U,
$$f_{U,S,\mathcal{T}} \geq f_{U,S}.$$

Convergence de l'algorithme

Théorème 1

Si $U = conv(S)$ et si $\mathcal{T}_n$ est la triangulation obtenue après la n-ième étape de l'algorithme, alors la suite de fonctions $(f_{U,S,\mathcal{T}_n})_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers $f_{U,S}$ quand n tend vers $+\infty$.

Convergence de l'algorithme

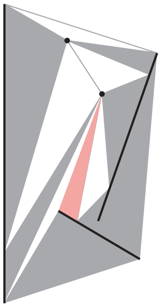
Théorème 1

Si $U = conv(S)$ et si $\mathcal{T}_n$ est la triangulation obtenue après la n-ième étape de l'algorithme, alors la suite de fonctions $(f_{U,S,\mathcal{T}_n})_{n \in \mathbf{N}}$ décroît vers $f_{U,S}$ quand n tend vers $+\infty$.

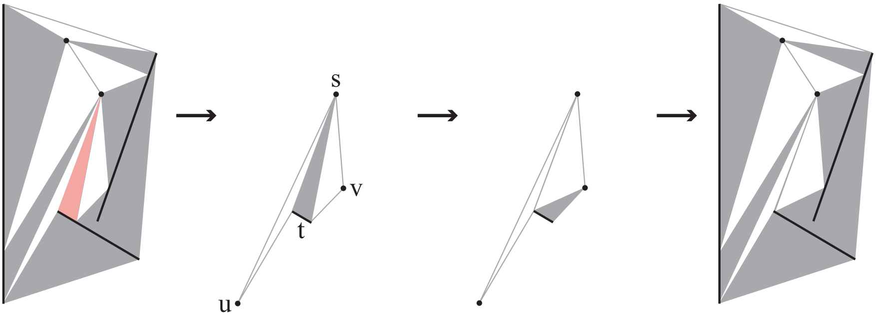
Théorème 2

Il existe un entier N tel que, quel que soit $n \geq N$, la triangulation $\mathcal{T}_n$ a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments de S.

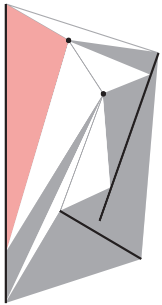
Exemple



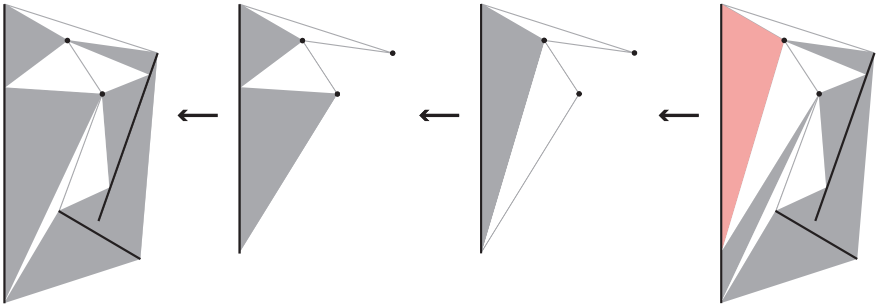
Exemple



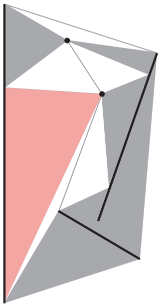
Exemple



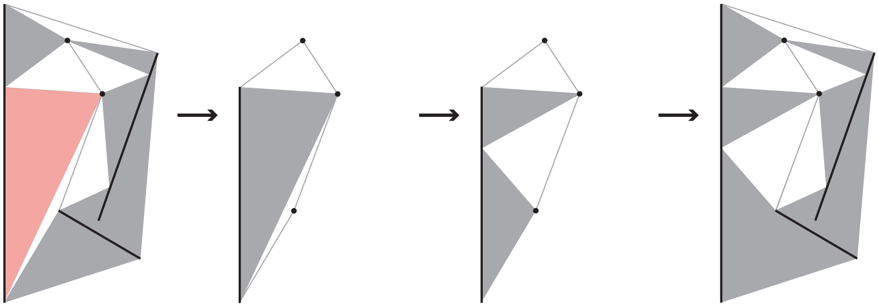
Exemple



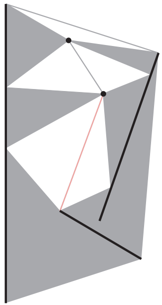
Exemple



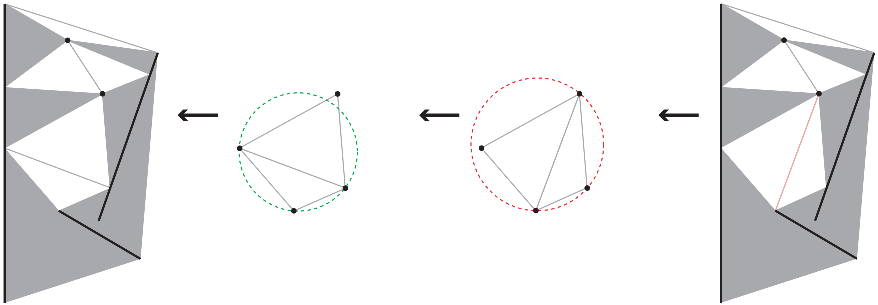
Exemple



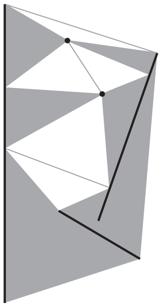
Exemple



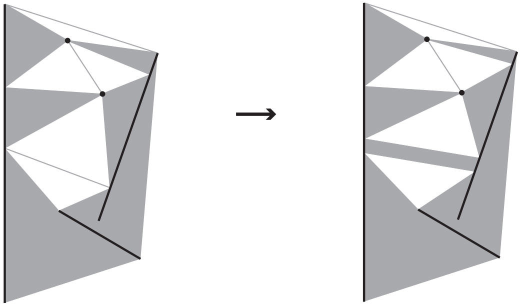
Exemple



Exemple



Exemple

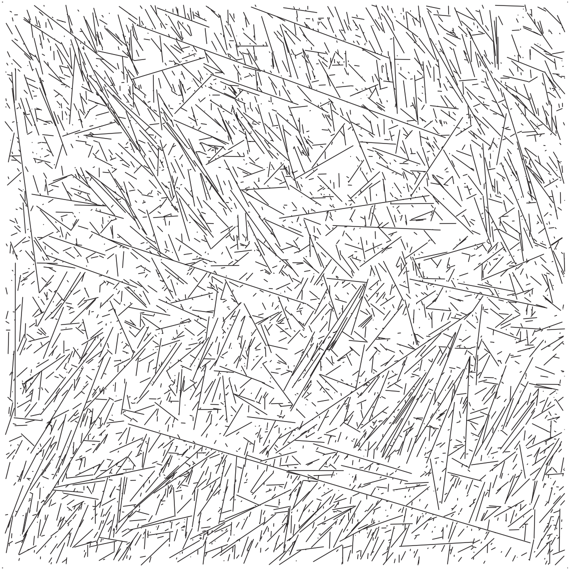


Conclusion

- Nouvelle généralisation de la notion de triangulation d'un ensemble de segments,
- Extension de la légalité des arêtes pour caractériser la triangulation de Delaunay de segments,
- Algorithme de flip pour construire la triangulation de Delaunay de segments.

- Perspectives :
  - Amélioration de l'algorithme de flip,
  - Optimalité de la triangulation de Delaunay de segments,
  - Sites plus généraux,
  - Généralisation en 3D.

Exemple avec 5 000 sites



Exemple avec 5 000 sites

Exemple avec 5 000 sites