Sur l'algorithme de Fortune

Pierre Kauffmann et Jean-Claude Spehner *

October 1, 1997

RÉSUMÉ. *L'algorithme de balayage de Fortune est connu comme l'algorithme le plus efficace pour construire le diagramme de Voronoï d'un ensemble fini $\mathcal{S}$ de points du plan. Nous proposons ici différentes améliorations : nous construisons le diagramme de Delaunay et non une triangulation, nous traitons tous les cas particuliers des points cocycliques ou alignés, nous utilisons les cartes comme structures de données et nous réduisons le nombre d'événements. Le temps d'exécution de l'algorithme est ainsi divisé par 2.*

ABSTRACT. *The sweep algorithm of Fortune is known to be the fastest algorithm which contructs the Voronoi diagram of a finite set of points in the plane. We give here the following improvements: we construct the Delaunay diagram and not a triangulation, we treat all singular cases of cocircular or colinear points, we use maps as data structures and finally we reduce the number of events. These improvements speed up Fortune's algorithm with a factor 2.*

MOTS-CLÉS : *diagrammes de Delaunay et de Voronoï, algorithme de balayage, carte.*
KEY WORDS: *Delaunay and Voronoi diagrams, sweep algorithm, maps.*

1 Introduction

Les diagrammes de Voronoï et de Delaunay sont utilisés dans beaucoup de domaines tels que la cristallographie, la robotique, la modélisation moléculaire et l'informatique graphique. A chaque site s d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points du plan E, est associé l'ensemble $V(s)$ des points de E plus proches de s que de tous les autres sites de $\mathcal{S}$. La partition du plan ainsi définie est appelée le diagramme de Voronoï de $\mathcal{S}$. Ce diagramme admet un dual orthogonal qui est appelé le diagramme de Delaunay de $\mathcal{S}$ (voir [AUR 92]).
Shamos et Hoey [SHA 75] (voir aussi [LEE 80] et [GUI 85]) ont donné un algorithme optimal qui construit par partage et fusion le diagramme de Voronoï d'un ensemble de n sites dans le plan en $O(n \log n)$. Fortune [FOR 87] a utilisé le balayage du plan pour construire de façon optimale ce diagramme. Dans cette méthode chaque côté créé l'est de façon définitive. Leach [LEA 92] a montré que cet algorithme est le meilleur.
Nous construisons directement le diagramme de Delaunay et non le diagramme de Voronoï car lorsque, dans la construction du diagramme de Voronoï, on découvre un nouveau côté de Voronoï

*Université de Haute Alsace - Laboratoire MAGE,
6, rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse FRANCE

$c(s,t)$, on ne connaît de $c(s,t)$ qu'un unique point et sa direction, tandis que le côté dual de Delaunay $e(s,t)$ qui relie les sites s et t est déterminé complètement. En outre, il est préférable d'utiliser les sites qui sont donnés, plutôt que les sommets de Voronoï qu'il faut calculer, car on évite ainsi les problèmes de précision. L'algorithme traite les cas particuliers des sites cocycliques et des sites situés sur une droite parallèle à la droite de balayage.
Dans la section 2, nous présentons l'algorithme de Fortune qui construit un transformé du diagramme de Voronoï dont les côtés sont des arcs d'hyperboles et sa variante qui construit directement le diagramme de Voronoï en utilisant des paraboles. Dans la section suivante, nous montrons que le diagramme de Delaunay peut être construit en utilisant une partie de la face externe à la place des paraboles et nous analysons la complexité de l'algorithme obtenu. Nous montrons aussi que la gestion des événements utilise en moyenne plus de 70% du temps de calcul. Nous proposons, dans la dernière section, différentes améliorations et, en particulier, une méthode pour réduire le nombre d'événements. Le temps de calcul est ainsi divisé par deux.

2 L'algorithme de Fortune et la variante des paraboles

Nous présentons ici l'algorithme de balayage de Fortune qui construit le transformé $Vor^*(\mathcal{S})$ du diagramme de Voronoï $Vor(\mathcal{S})$ d'un ensemble fini $\mathcal{S}$ de points du plan ainsi que sa variante qui construit directement $Vor(\mathcal{S})$ en utilisant des paraboles. Lors de l'étude des événements de cet algorithme nous donnons aussi les résultats duaux pour la construction du diagramme de Delaunay $Del(\mathcal{S})$ afin de préparer la section suivante. La section commence par le rappel des principales définitions relatives aux diagrammes $Vor(\mathcal{S})$ et $Del(\mathcal{S})$.

2.1 Les diagrammes de Voronoï et de Delaunay

Pour tout site s d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points du plan, l'ensemble $V(s)$ des points du plan qui sont plus proches de s que de tous les autres sites de $\mathcal{S}$ est appelé la *région de Voronoï* de s. $V(s)$ est un ouvert convexe.
Lorsque l'ensemble $c(s,t)$ des points du plan qui sont équidistants de deux sites s et t et plus proches d'eux que de tous les autres sites n'est pas vide, $c(s,t)$ est appelé un *côté de Voronoï*.
Tout point du plan qui est équidistant d'au moins trois sites de $\mathcal{S}$ et est plus proche d'eux que de tous les autres sites est appelé un *sommet de Voronoï* de $\mathcal{S}$.
Pour tout point u du plan, le *cercle* $K(u)$ de centre u et de rayon la distance $d(u,\mathcal{S})$ de u à l'ensemble $\mathcal{S}$ est dit *critique* pour $\mathcal{S}$.
Un point u est un sommet de Voronoï si, et seulement si, $K(u) \cap \mathcal{S}$ contient au moins trois sites. $K(u)$ est alors appelé le *cercle de Delaunay* de u.
La partition du plan en sommets, côtés et régions de Voronoï est appelée le *diagramme de Voronoï* de $\mathcal{S}$ et est notée $Vor(\mathcal{S})$.

Ce diagramme admet un dual orthogonal dont les *sommets* sont les sites de $\mathcal{S}$. A tout côté de Voronoï $c(s,t)$ est associé le *côté de Delaunay* $e(s,t)$ qui relie les deux sites s et t. La *région de Delaunay* $R(u)$ duale d'un sommet de Voronoï u est l'intérieur du polygone convexe dont les sommets sont les sites $K(u) \cap \mathcal{S}$.
Le diagramme ainsi obtenu est appelé *diagramme de Delaunay* de $\mathcal{S}$ et est noté $Del(\mathcal{S})$.

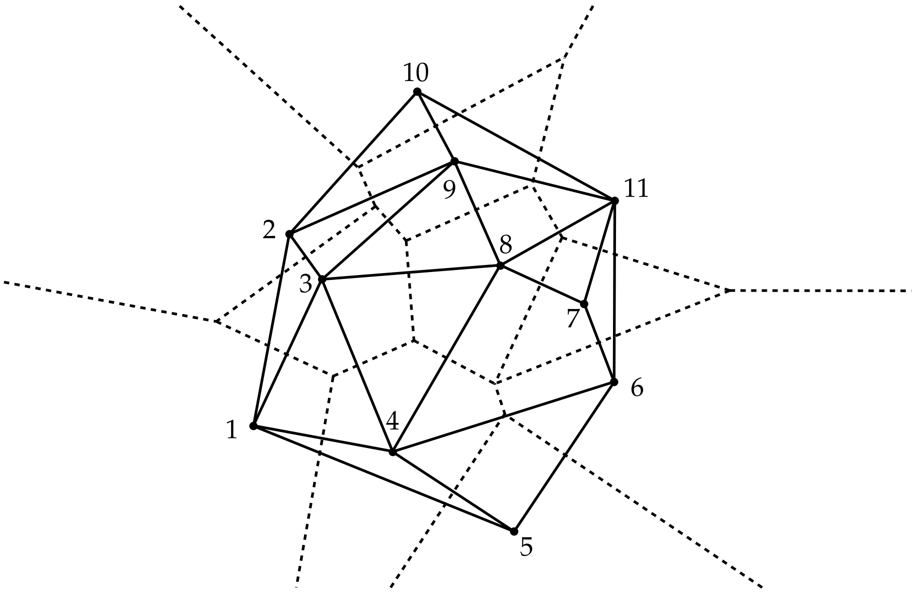

Figure 1: Le diagramme de Voronoï en pointillés et le diagramme de Delaunay en traits pleins.

2.2 Le diagramme de Fortune

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sites triés par abscisses croissantes et soit Δ la droite d'équation $x = t$ à l'instant t. Lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, Δ balaye le plan E.
Fortune détermine au fur et à mesure du balayage du plan par la droite Δ un diagramme $Vor^*(\mathcal{S})$ qui est le transformé du diagramme de Voronoï $Vor(\mathcal{S})$ par une transformation * telle que l'on rencontre la région associée à un site en même temps que ce site. A chaque instant t, la partie de $Vor^*(\mathcal{S})$ qui est située dans le demi-plan balayé par Δ est définitivement déterminée (voir figure 2).
La transformation * est telle que, pour tout point $p = (px, py)$ de E, $^*(p) = (px + d(p, \mathcal{S}), py)$. Dans 2.3, nous montrons que les côtés de $Vor^*(\mathcal{S})$ sont des arcs d'hyperboles.

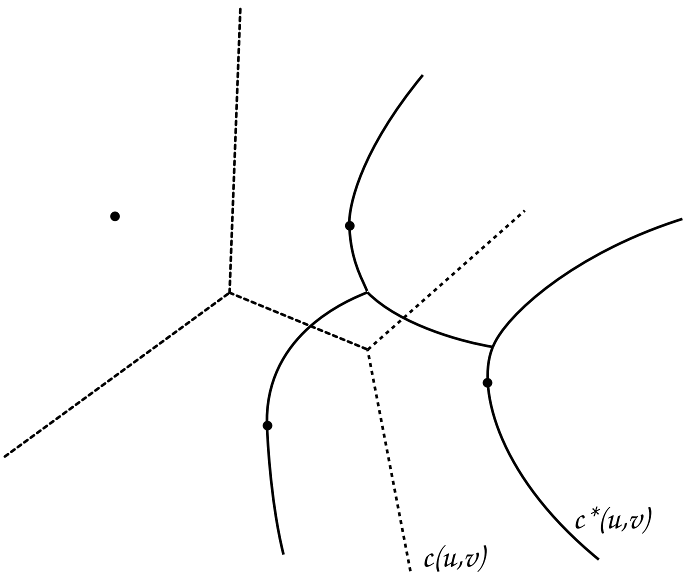

Figure 2: Le diagramme de Voronoï $Vor(\mathcal{S})$ en pointillés et son transformé $Vor^*(\mathcal{S})$.

2.3 Les demi-cônes de Fortune

Fortune donne l'interprétation tridimensionnelle suivante de la transformation * : pour tout site s, soit C_s le demi-cône de révolution de sommet s, d'axe parallèle à Oz et d'angle $\pi/4$ qui est ouvert vers les z positifs. $p \in C_s \iff p = (x, y, d(s, p'))$ avec $p' = (x, y)$.
Si deux sites s et t de $\mathcal{S}$ définissent un côté de Voronoï $c(s,t)$, $C_s \cap C_t$ est contenu dans le plan médiateur de st et est donc une branche d'hyperbole. La projection de $C_s \cap C_t$, suivant la direction (1,0,-1) est donc aussi une hyperbole qui supporte le transformé $c^*(s,t)$ du côté $c(s,t)$.

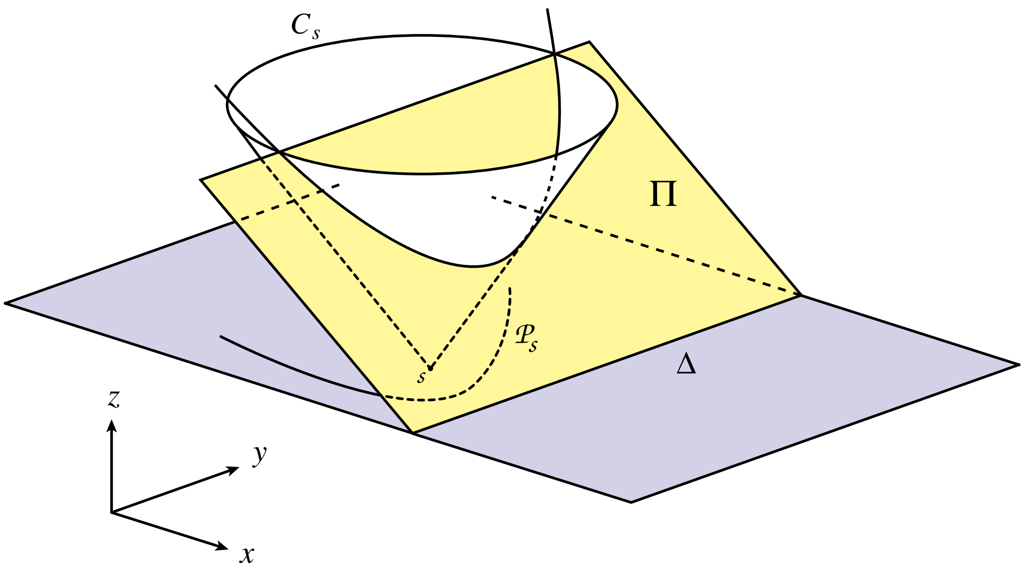

Figure 3: Les demi-cônes et les paraboles.

Les demi-cônes de Fortune permettent de comprendre le lien entre l'algorithme de Fortune et sa variante proposée par Seidel [SEI 88] (voir aussi Beauquier, Berstel et Chrétienne [BEA 92] et Boissonnat et Yvinec [BOI 95]).

2.4 Le front parabolique

Soit Π le plan incliné d'un angle $\pi/4$ par rapport au plan xOy, perpendiculaire à xOz et qui coupe le plan xOy selon la droite de balayage Δ.
Comme l'intersection d'un cône de révolution avec un plan parallèle à une génératrice est une parabole, la projection orthogonale P_s de $C_s \cap \Pi$ sur le plan xOy est aussi une parabole. La parabole P_s admet s comme foyer et Δ comme directrice.

Si $\mathcal{T}$ est l'ensemble des sites de $\mathcal{S}$ déjà balayés, l'enveloppe $\mathcal{F}$ des paraboles P_s associées aux sites s de $\mathcal{T}$ est une courbe qui sépare la partie du diagramme $Vor(\mathcal{S})$ qui est définitivement déterminée de celle qui reste à construire (voir figure 4).
$\mathcal{F}$ est appelé le *front parabolique associé à* Δ. $\mathcal{F}$ est l'ensemble des centres des cercles critiques pour $\mathcal{S}$ qui sont tangents à la droite Δ (voir figure 5).
Tout point d'intersection de deux paraboles P_s et P_t avec $s, t \in \mathcal{T}$ qui appartient à $\mathcal{F}$ est appelé un *sommet* de F. $\mathcal{F}$ est ainsi décomposé en *arcs* de paraboles. Il convient de noter qu'une même parabole P_s peut porter plusieurs arcs de $\mathcal{F}$.

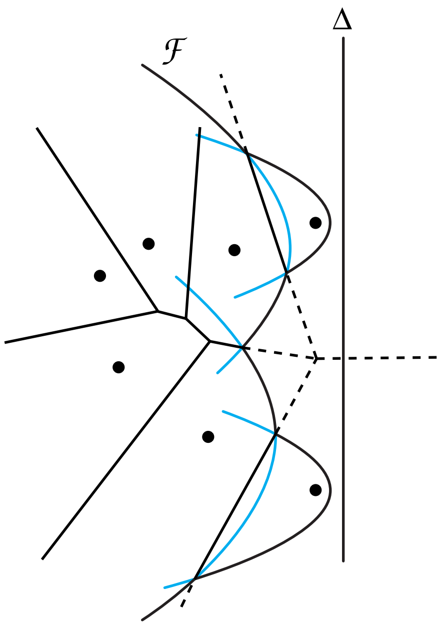

Figure 4: Le front parabolique sépare la partie de $Vor(\mathcal{S})$ qui est définitivement tracée de celle qui ne l'est pas.

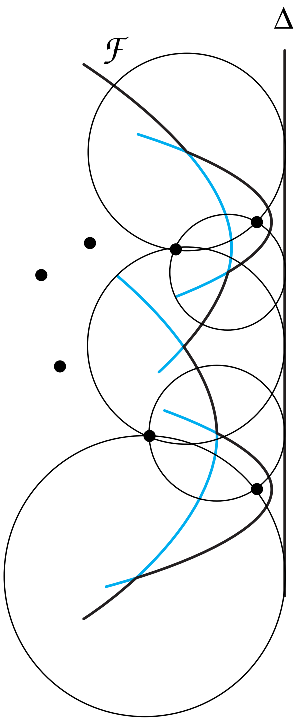

Figure 5: Le front parabolique et les cercles critiques tangents qui passent par 2 sites déjà balayés.

2.5 Les événements et leur gestion

Le front parabolique $\mathcal{F}$ associé à Δ se transforme en fonction de la position de la droite de balayage Δ. Les positions de Δ (ou les points du plan qui définissent de telles positions) pour lesquelles un nouvel arc ou sommet de $\mathcal{F}$ est créé ou pour lesquelles un arc ou un sommet de $\mathcal{F}$ disparaît sont appelés les *événements* du balayage.
Les sites sont des événements car pour chaque site nouveau balayé s, un arc de parabole nouveau apparaît dans $\mathcal{F}$ (voir propriété 1). En outre, pour tout sommet de Voronoï u, le point transformé u^* est aussi un événement qui correspond à la disparition d'un arc de $\mathcal{F}$ (voir propriété P2). Un site s peut coïncider avec un tel point u^*. Dans un tel cas le *site* s est dit *ultime* (voir propriété P3).
Il est nécessaire de déterminer les transformés des sommets de Voronoï. Le transformé u^* d'un sommet de Voronoï u est le point d'abscisse maximale du cercle de Delaunay $K(u)$. Ceci nous conduit à la définition suivante.
Tout point qui est le point d'abscisse maximale du cercle qui passe par trois sites, foyers d'arcs de paraboles consécutifs dans $\mathcal{F}$, est appelé un *point ultime*. Un point ultime devient un événement s'il est balayé par Δ et, dans ce cas, on dit qu'il est validé. Dans le cas contraire, il sera éliminé avant d'être balayé par Δ.
Les événements doivent être triés par abscisses croissantes. Les sites, triés préalablement, sont stockés dans une file de priorité $\mathcal{S}$. Les points ultimes générés par l'algorithme sont stockés dans un arbre binaire équilibré $\mathcal{U}$ qui est remis à jour à chaque création ou suppression de point ultime. La gestion du front parabolique $\mathcal{F}$ est réalisée grâce à un second arbre binaire équilibré dont chaque sommet représente un arc de parabole de F.

Propriété 1 *Lors du balayage d'un site non ultime s, un nouvel arc de parabole apparaît dans le front parabolique $\mathcal{F}$ et un côté de Delaunay issu de s est créé.*

Preuve.- Lorsque la droite de balayage Δ rencontre un nouveau site s, le plan Π est tangent au demi-cône C_s. Dans le front $\mathcal{F}$, un arc de parabole dégénéré en un segment de droite horizontal d'extrémité s est donc créé. L'autre extrémité de ce segment est un point p de $\mathcal{F}$ porté par une parabole P_t. Le cercle $K(p)$ est tangent à Δ en s et passe par t. p appartient donc au côté de Voronoï $c(s,t)$. Par dualité, le segment de droite ouvert reliant s et t est un côté de Delaunay (voir figure 6.a).
Si t' et t'' sont les sites voisins de t dans le diagramme avant la création du côté st, le point ultime éventuel associé à $\{t, t', t''\}$ est éliminé et les points ultimes éventuels associés à $\{s, t, t'\}$ et à $\{s, t, t''\}$ sont créés et placés dans $\mathcal{U}$.□

Propriété 2 *Lors du balayage d'un point ultime qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$, un arc de parabole disparaît dans le front parabolique $\mathcal{F}$ et une région et un côté de Delaunay sont créés.*

Preuve.- Un point ultime u est le point d'abscisse maximale d'un cercle passant par 3 sites r, s et t qui sont les foyers de 3 arcs de paraboles consécutifs dans $\mathcal{F}$. Lorsque Δ tend vers le point ultime u, l'intersection p de P_s et P_t et l'intersection q de P_t et P_r tendent vers un même point v. L'arc pq de la parabole P_t tend donc vers 0. Les cercles critiques $K(p)$ et $K(q)$ tendent vers le cercle critique $K(v)$ qui passe par les sites r, s et t. $K(v)$ est donc un cercle de Delaunay et v est un sommet de Voronoï. Il en résulte que $c(s,r)$ est non vide et que le segment ouvert $e(s,r)$ qui relie les points r et s est un côté de Delaunay qui ferme la région de Delaunay $R(v)$ duale de v (voir figure 6.b).□

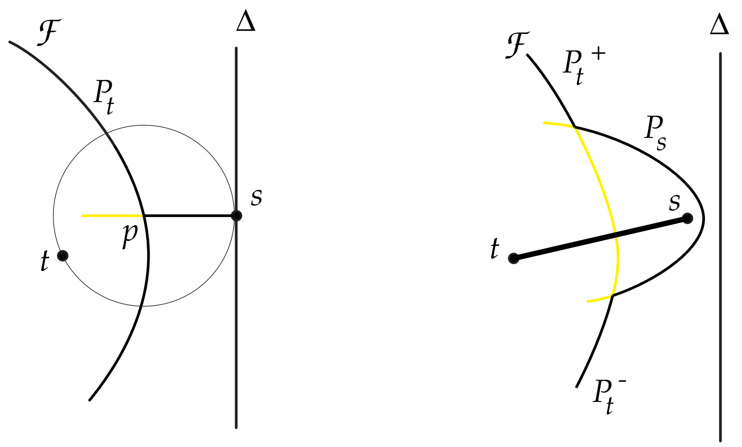

Figure 6: Evénement "site non ultime".

Le point ultime u validé est alors éliminé de $\mathcal{U}$. Si r' et s' sont les sites distincts de t qui génèrent respectivement les arcs de paraboles consécutifs à ceux de P_r et P_s, les points ultimes éventuels associés à $\{t, r, r'\}$ et $\{t, s, s'\}$ sont éliminés et ceux qui sont associés à $\{s, r, r'\}$ et $\{r, s, s'\}$ sont créés et placés dans $\mathcal{U}$.

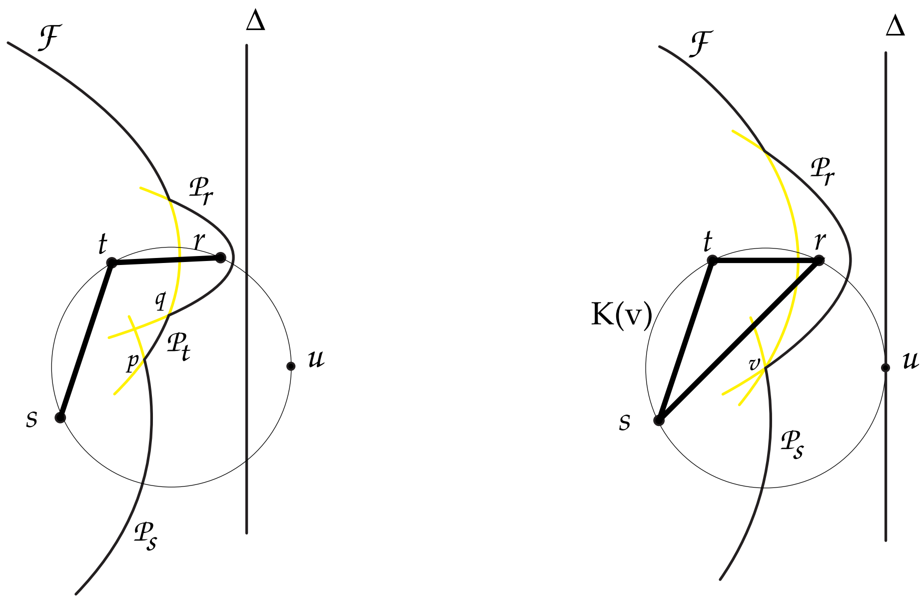

Figure 7: Evénement "point ultime qui n'est pas un site".

Propriété 3 *Lors du balayage d'un site ultime s, un arc de parabole est remplacé par un autre et une région et deux côtés de Delaunay sont créés.*

Preuve.- Comme dans la preuve précédente, l'arc pq de la parabole P_t, tend vers 0 et les cercles critiques $K(p)$ et $K(q)$ tendent vers le cercle de Delaunay $K(v)$ qui passe par les sites r, s, t et, en outre, par le site u. L'arc de parabole dégénéré en le segment uv est alors créé. ur et us sont alors des côtés de Delaunay qui ferment la région de Delaunay duale du sommet de Voronoï v (voir figure 6.c).□

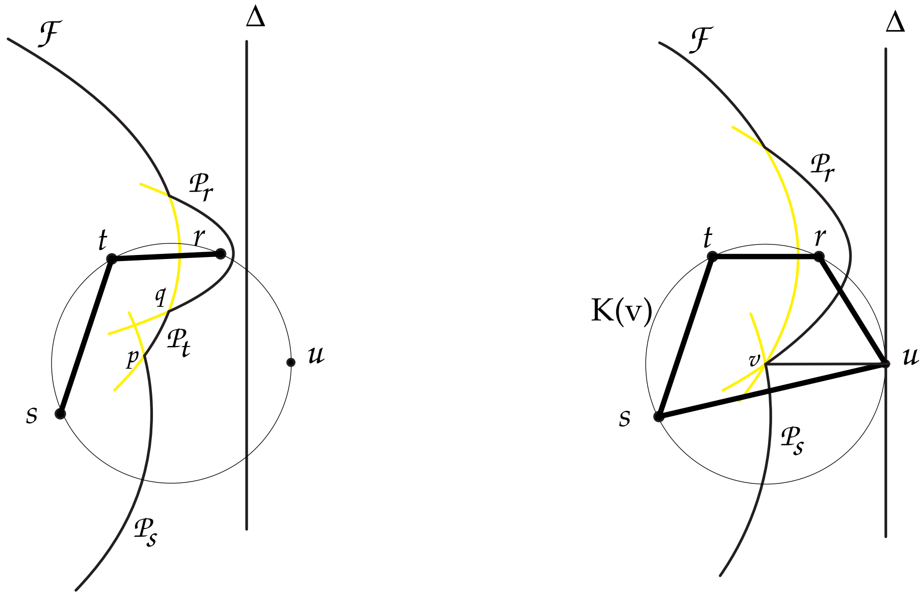

Figure 8: Evénement "site ultime ".

2.6 Les grandes lignes de l'algorithme

3 Le remplacement du front parabolique $\mathcal{F}$ par le chemin frontal de Delaunay $\mathcal{D}$.

Au lieu de déterminer le diagramme de Voronoï, nous déterminons son dual, le diagramme de Delaunay $Del(\mathcal{S})$. Ceci nous conduit à remplacer le front parabolique $\mathcal{F}$ associé à la droite de balayage Δ par un front $\mathcal{D}$ porté par la face externe de la partie déterminée du diagramme de Delaunay. La décomposition frontale de la droite de balayage explique le passage du front parabolique au front de Delaunay $\mathcal{D}$. L'étude de la taille des arbres binaires utilisés pour la gestion du front $\mathcal{D}$ et pour trier les points ultimes conduit à une preuve facile de la complexité de l'algorithme. En outre, une analyse statistique compare les temps d'exécution des différentes parties de l'algorithme.

3.1 Le chemin frontal de Delaunay

Lors de la détermination d'un côté $c(s,t)$ de $Vor(\mathcal{S})$ par la variante des paraboles, on ne connaît tout d'abord qu'un sommet de $c(s,t)$ et la direction de $c(s,t)$. La détermination de $c(s,t)$ ne sera terminée que lorsque les éventuelles extrémités u et v de $c(s,t)$ seront trouvées. u et v sont alors des sommets de Voronoï. Par contre, il suffit de connaître un point de $c(s,t)$ pour déterminer complètement le côté de Delaunay dual $e(s,t)$ qui joint les sites s et t. En outre, le côté $e(s,t)$ appartient à la face externe du diagramme déterminé jusqu'au moment où les deux régions de Delaunay $D(u)$ et $D(v)$ duales de u et v sont déterminées.
Il en résulte que, si $Del(\mathcal{S},\Delta)$ désigne la partie du diagramme de Delaunay déterminée à l'instant t du balayage, alors la face externe de $Del(\mathcal{S},\Delta)$ peut remplacer le front parabolique. Il convient d'éliminer de cette face tous les côtés c qui sont parallèles à Δ et tels que $\mathcal{S}$ et Δ soient du même côté de c car tous les sites sont alors du même côté de la droite qui supporte le côté c et, par suite, le côté c appartient à la frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$. Le chemin externe de $Del(\mathcal{S},\Delta)$

ainsi déterminé est appelé le *chemin frontal de Delaunay* associé à Δ.
Nous utilisons les cartes [EDM 60] comme structures de données pour représenter le diagramme de $Del(\mathcal{S}, \Delta)$. Un côté $e(s,t)$ est donc représenté par un brin b et son opposé $\alpha(b)$ et un sommet s est représenté par l'ensemble des brins issus de s et par la permutation circulaire σ de ces brins qui précise l'ordre selon lequel ils se placent en tournant autour de s.
Le chemin frontal de Delaunay associé à Δ est alors représenté par une suite $\mathcal{D} = (b_1, b_2, ..., b_k)$ de brins tels que, pour tout i de $\{1, ..., k\}$, b_i soit un brin externe de $Del(\mathcal{S}, \Delta)$ tel que la droite orientée qui supporte b_i admette au moins un point de Δ à sa gauche.
Tout *brin* de $\mathcal{D}$ est dit *frontal*.

3.2 La décomposition frontale de la droite de balayage et les points attachés aux brins frontaux

La projection orthogonale du front parabolique $\mathcal{F}$ sur la droite de balayage Δ à l'instant t, découpe Δ en segments et deux demi-droites. Cette décomposition Φ de Δ est appelée *décomposition frontale* de Δ. Les sommets de Φ sont les projections des sommets de $\mathcal{F}$ (voir figure 7) et les points de contact des cercles critiques tangents à Δ qui passent par 2 sites de $\mathcal{T}$ (voir aussi figure 5).
Soient b un brin frontal et les sommets $t =< \sigma > (b)$ et $s =< \sigma > (\alpha(b))$ dont sont respectivement issus les brins b et $\alpha(b)$.
Si la droite ts coupe Δ en un point z, alors le point x de Δ situé à gauche de la droite orientée ts et tel que $zx^2 = zs.zt$ est dit *attaché* à b (voir figure 8).
Si la droite ts est parallèle à Δ, le point d'intersection x de Δ et de la médiatrice de ts est dit *attaché* à b si x est à gauche de la droite orientée ts (voir figure 8).
Le point attaché à b est noté $pat(b)$.

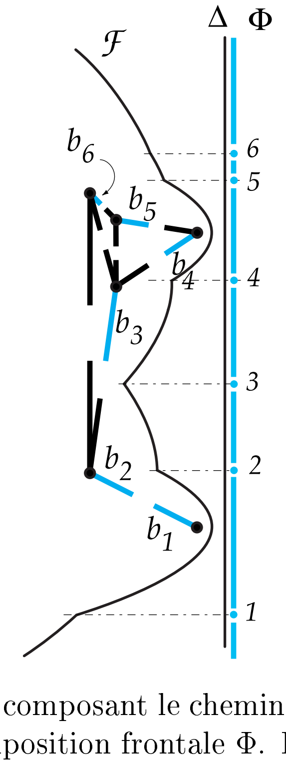

Figure 9: Le chemin frontal : les brins composant le chemin frontal $\mathcal{D}$ sont en noir. Au brin frontal b_i est attaché le sommet i de la décomposition frontale Φ. Le brin b n'est pas frontal..

Propriété 4 *(i) Pour tout brin frontal b, le point attaché à b est un sommet de la décomposition frontale Φ de Δ.*
(ii) L'application $b \to pat(b)$ du chemin frontal $\mathcal{D} = (b_1, b_2, ..., b_k)$ dans l'ensemble des sommets de Φ est une bijection croissante.

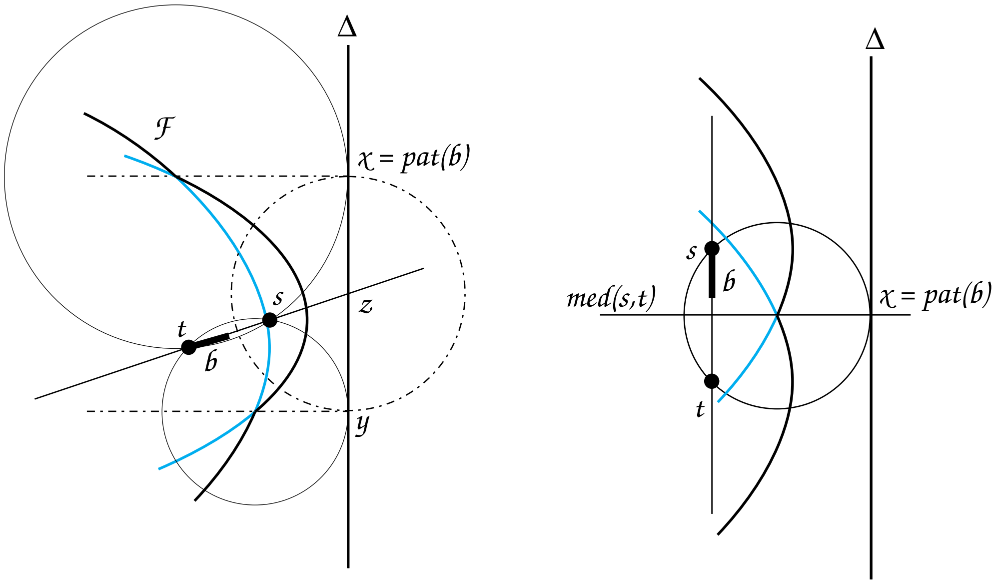

Figure 10: Le point attaché au brin b s'il existe.

Preuve.- (i) Pour tout brin frontal b, soient $x = pat(b)$, $t =< \sigma > (b)$, $s =< \sigma > (\alpha(b))$, $\mathcal{C}$ le cercle passant par les points s, t et x et p son centre. (voir figure 8).
Dans le cas où la droite st coupe Δ en z, le cercle $\mathcal{C}$ est tangent en x à Δ puisque $zx^2 = zs.zt$ et dans le cas où st est parallèle à Δ il l'est aussi parce que x est sur la médiatrice de st. Comme b est frontal, $\mathcal{C}$ ne contient aucun site en son intérieur, d'où $\mathcal{C} = K(p)$. p est donc un sommet du front parabolique et x est un sommet de la décomposition frontale Φ de Δ.
(ii) Le brin $b' = \alpha \circ \sigma(b)$ appartient à la même face que b et est donc externe. Soit $r =< \sigma > (b')$ et supposons que b' est frontal c'est à dire que ou bien la droite rt coupe Δ ou bien que Δ est à gauche de la droite orientée rt. Comme $e(r,t)$ est un côté de Delaunay, $c(r,t)$. $c(r,t)$ coupe alors les paraboles P_r et P_t en un point q du front parabolique et le cercle critique $K(q)$ est tangent à Δ en la projection orthogonale y de q sur Δ y est alors le point attaché à b'. En outre, pour tout point h du segment xy, le cercle tangent en h à Δ et passant par le site t est critique et son centre p appartient à la parabole P_t et au front $\mathcal{F}$ (voir figure 9).□

Il n'existe donc aucun sommet de la décomposition frontale Φ de Δ entre x et y.
L'application $b \to pat(b)$ de $\mathcal{D}$ dans l'ensemble des sommets de Φ est donc une bijection croissante.

3.3 Le point ultime associé à un brin frontal

Soient trois brins consécutifs b_i, b_{i+1} et b_{i+2} de $\mathcal{D}$ et les sites $r =< \sigma > (b_i)$, $s =< \sigma > (b_{i+1})$ et $t =< \sigma > (b_{i+2})$ où r, s et t sont deux à deux distincts. Si t est situé à droite de la droite orientée rs, alors le point d'abscisse maximale u du cercle passant par r, s et t est un *point ultime* et est dit *associé* au brin b_{i+1}. Dans le cas où t n'est pas situé à droite de la droite orientée rs, aucun point ultime n'est associé à b.

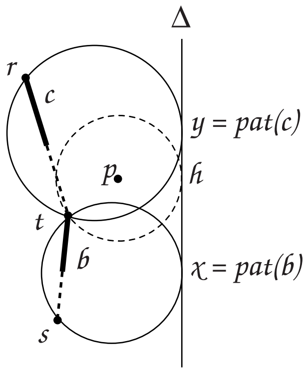

Figure 11: Les points attachés à deux brins successifs de $\mathcal{D}$.

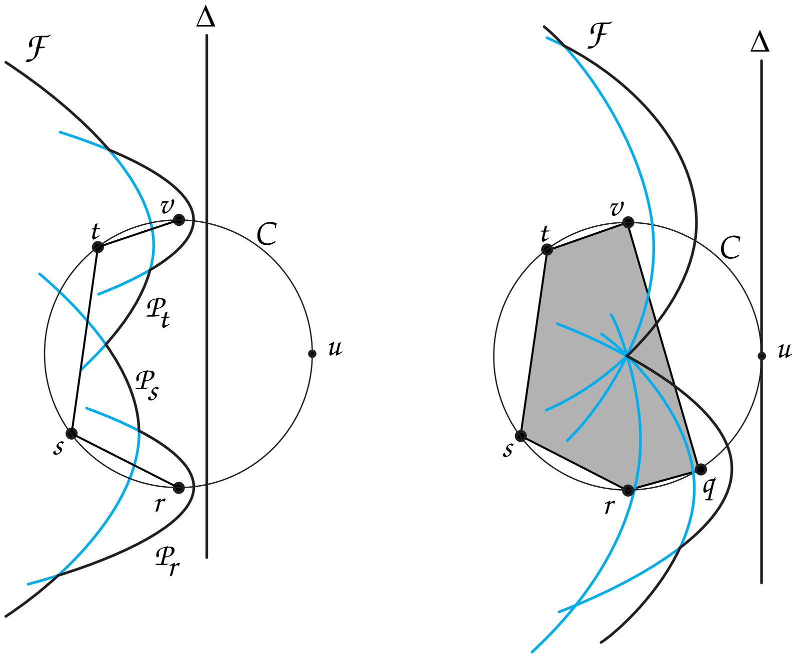

Figure 12: La gestion des sites cocycliques.

Si $k = 4$ sites sont cocycliques, le chemin frontal de Delaunay contient $k - 2$ brins admettant le même point ultime u. Ce test sur le point ultime associé détecte tous les sites situés sur un même cercle et détermine les brins bas et haut tels que les points ultimes associés à $\alpha \circ \sigma(haut)$ et $\sigma^{-1} \circ \alpha(bas)$ soient différents de u. Si $v = \alpha \circ \sigma(haut)$ et $q =< \sigma^{-1} \circ \alpha(bas)$, le côté $e(v, q)$ créé ferme alors une région de Delaunay.

Propriété 5 *Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des sites balayés à l'instant t.*
(i) Le nombre k de brins du front de Delaunay $\mathcal{D}$ vérifie $k = 2|T| - 2$.
(ii) A chaque instant, le nombre de points ultimes crées, non invalidés et non balayés est inférieur ou égal à k.

Preuve.- (i) D'après la définition 2.1, $\mathcal{D} = (b_1, b_2..., b_k)$ est un chemin de la face directe externe de la carte de $Del(\mathcal{S}, \Delta)$. $\mathcal{D}$ se décompose donc en une face élémentaire et simple et des arborescences. Il en résulte, par récurrence sur $|\mathrm{T}|$, que $k = 2|\mathrm{T}| - 2$.
(ii) L'application qui associe un point ultime à un brin frontal est surjective mais non injective et, en général, non partout définie. Il en résulte que $|\mathcal{U}| = k$.□

3.4 La complexité de l'algorithme

Théorème 1 *La complexité de l'algorithme de construction du diagramme de Delaunay $Del(\mathcal{S})$ [resp. de Voronoï $Vor(\mathcal{S})$] d'un ensemble de n sites est en $O(n \log n)$.*

Preuve.- Comme $Del(\mathcal{S})$ est un diagramme planaire de n sommets, le nombre f de faces de $Del(\mathcal{S})$ est tel que $f = 2n - 4$. Comme, d'après les propriétés 2 et 3, pour tout point ultime balayé, une face de Delaunay est créée, le nombre total d'événements est inférieur ou égal à $3n - 4$. En outre, d'après la propriété 5, $|\mathcal{U}| = |\mathcal{D}| = 2n - 2$. Toute recherche, insertion ou suppression dans les arbres binaires $\mathcal{U}$ et $\mathcal{D}$ est donc en $O(\log n)$. La construction du diagramme de Delaunay $Del(\mathcal{S})$ est donc en $O(n \log n)$. Comme la construction de $Vor(\mathcal{S})$ connaissant $Del(\mathcal{S})$ est en $O(n)$, l'algorithme complet est aussi en $O(n \log n)$.□

3.5 L'analyse statistique de l'algorithme

Nous avons analysé le comportement de l'algorithme en fonction du nombre n de sites répartis aléatoirement dans un carré $[0, 1[\times[0, 1[$ jusqu'à $n = 100000$. Nous avons constaté que les procédures de gestion des arbres binaires des points ultimes $\mathcal{U}$ et du front $\mathcal{D}$ prennent 70% du temps de calcul de l'algorithme: 51% pour $\mathcal{U}$ et 19% pour $\mathcal{D}$.
Comme au plus 2 points ultimes sont générés à chaque événement, le nombre total de points ultimes générés est inférieur ou égal à $6n - 8$. Expérimentalement, le nombre de points ultimes générés par l'algorithme est en moyenne égal à 3,6 fois le nombre de sites. Ceci explique que la gestion de points ultimes soit plus longue que celle du front de Delaunay alors que la taille de $\mathcal{U}$ est plus petite que celle de $\mathcal{D}$ d'après la propriété 5.
La gestion de la carte du diagramme de Delaunay et le tri initial des sites ne prennent respectivement que 8% et 5% du temps de calcul de l'algorithme.

4 L'accélération de l'algorithme

L'étude statistique de la section précédente montre que pour accélérer l'algorithme il importe d'accélérer la gestion des arbres binaires $\mathcal{U}$ et D. Nous montrons ici que la localisation d'un site par rapport au front de Delaunay peut être optimisée et que l'utilisation de la carte permet de simplifier la gestion de l'arbre binaire de $\mathcal{D}$. Mais c'est en réduisant le nombre de points ultimes que nous obtenons la plus grande amélioration des performances.

4.1 L'accélération de la localisation dans le front

Lors du balayage d'un nouveau site s, il faut localiser s par rapport au front de Delaunay. Il faut donc comparer l'ordonnée de s avec celle de $pat(b)$ pour un ou plusieurs brins frontaux b.
Comme

$$zs * zt = zs * (zs + st) = zs^2 * \frac{z_x - t_x}{z_x - s_x}$$

on peut associer à chaque brin frontal b les invariants de ce calcul. L'ordonnée de $pat(b)$ devient alors une expression simple en fonction de l'abscisse de Δ. La localisation a ainsi été optimisée.

4.2 L'utilisation de la carte dans la gestion de l'arbre $\mathcal{D}$

Lors du balayage d'un nouveau site s nous insérons deux brins dans l'arbre équilibré qui gère $\mathcal{D}$. Quand s est localisé par rapport au chemin frontal $\mathcal{D}$, un brin frontal b est déterminé et il n'est pas nécessaire de réaliser une insertion à partir de la racine de l'arbre de $\mathcal{D}$, sachant que les brins que l'on veut insérer sont des voisins directs de b dans $\mathcal{D}$. Une procédure d'insertion rapide permet d'insérer en temps constant les deux nouveaux brins dans cet arbre binaire. Nous supprimons ainsi deux recherches sur trois dans l'arbre équilibré qui gère $\mathcal{D}$.

4.3 La réduction du nombre de points ultimes

A chaque point ultime u sont affectés deux sites $g(u)$ et $d(u)$ qui appartiennent au front de Delaunay $\mathcal{D}$ et tels que lorsque le point ultime u est atteint par la droite de balayage Δ alors on construit le côté de Delaunay $e(g(u), d(u))$.
Deux *points ultimes* u et v sont dits en *conflit* si les segments $e(g(u), d(u))$ et $e(g(v), d(v))$ se coupent.
Le *conflit* entre deux point ultimes u et v est dit *local* si u et v sont en conflit et si les sites $d(v)$, $d(u)$, $g(v)$ et $g(u)$ sont des sommets consécutifs du chemin $\mathcal{D}$. Supposons que l'abscisse de u est plus petite que celle de v. Alors le conflit est résolu en remplaçant le point ultime v par un point ultime v' associé au côté $e(g(v), d(u))$ ou au côté $e(g(u), d(v))$.
Lors du déroulement de l'algorithme de Fortune, le point ultime v est généré puis détruit lors du balayage de u et v' est alors généré. Dans notre variante v' est directement généré à la place de v et ceci évite l'insertion puis la suppression de v dans l'arbre $\mathcal{U}$.
Si l'on choisit de résoudre non seulement les conflits locaux mais aussi tous les conflits, on perd l'optimalité de l'algorithme. En effet l'apparition d'un nouveau site peut remettre en cause $O(n)$ décisions prises et cette remise en cause peut être itérée $O(n)$ fois.
Lors de la suppression des conflits locaux, le rapport entre le nombre de points ultimes générés et

le nombre de points ultimes validés passe ainsi de 1,8 à 1,4 en moyenne. Ceci correspond à une réduction de 50% des points ultimes non validés.

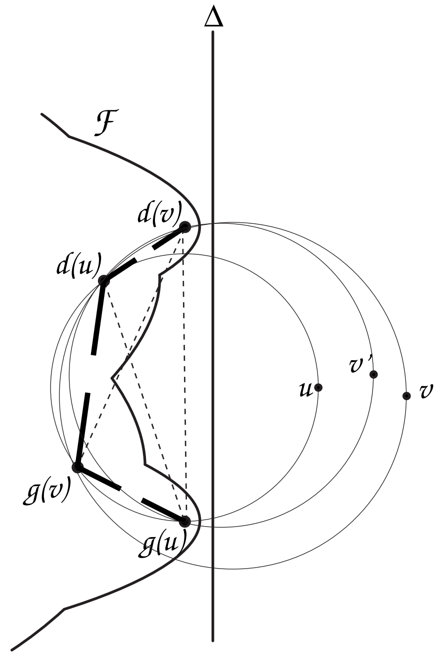

Figure 13: Un conflit local.

5 Conclusion

L'accélération donnée en 4.1 a permis de diviser le temps d'exécution de la gestion de $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{D}$ par 1,3. L'accélération donnée en 4.3 a permis de diviser le temps d'exécution de la gestion de $\mathcal{U}$ par 3,7. Dans la version accélérée, la gestion de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{U}$ n'occupe plus que 54% du temps de l'algorithme dont 26% pour $\mathcal{D}$ et 28% pour $\mathcal{U}$.

L'ensemble de ces accélérations fait que le temps d'exécution a été plus que divisé par deux (voir figure 12). Fortune à donné une généralisation de son algorithme au diagramme de Voronoï $Vorseg(\mathcal{S})$ d'un ensemble $\mathcal{S}$ de sites et de segments. Nous avons associé à $Vorseg(\mathcal{S})$ un diagramme de Delaunay dual $Delseg(\mathcal{S})$ grâce à une décomposition des côtés de $Vorseg(\mathcal{S})$ en éléments simples. Nous avons adapté nos accélérations à la construction de $Delseg(\mathcal{S})$, ce qui nous a permis d'obtenir une construction optimale rapide et robuste du diagramme de Voronoï de sites et de segments.

Bibliographie

[AUR 92] F. Aurenhammer, Voronoi diagrams - A survey of a fundamental geometric data structure, A.C.M. Computational Surveys, 23, 3, (1992), 345-405.

[BEA 92] D. Beauquier, J. Berstel et Ph. Chrétienne, Eléments d'algorithmique, Masson, (1992), 411-425.

[BOI 95] J.- D. Boissonnat et M. Yvinec, Géométrie Algorithmique, Ediscience International (à paraître)

[EDM 60] J. Edmonds, A combinatorial representation for polyhedral surfaces, Notices Amer.

Math. Soc. 7, (1960), 646.
[FOR 87] S. Fortune, A sweepline algorithm for Voronoi diagrams, Algorithmica, 2, (1987), 153-174.
[GUI 85] L. Guibas and J. Stolfi, Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams, A. C.M. Trans. on Graphics, 4, 2, (1985), 74-123.
[LEA 92] G. Leach, Improving worst case optimal Delaunay triangulation algorithms, Proc of the fourth Canadian Conf. on Comput. Geometry, (1992), 340-346.
[LEE 80] D. T. Lee and B. J. Schachter, Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation, Int. J. Comput. Inf. Sci. 9, (1980), 219-242.
[SEI 88] R. Seidel, Constrained Delaunay triangulations and Voronoi diagrams with obstacles, in Rep. 260 Graz, Austria, (1988), 178-191.
[SHA 75] M. I. Shamos and D. Hoey, Closest-point problems, Proc. of the 16th annual IEEE Symposium on FOCS, (1975), 151-172.